

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE	BACCALAUREAT 2012	DURÉE : 4 H
	MATHÉMATIQUES	Coef. : 3
OFFICE DU BACCALAUREAT	SÉRIE D	

SESSION NORMALE

Exercice 1 (4 points)

Le tableau suivant donne l'évolution du prix en dollar (\$) de la tonne d'une terre rare entrant dans la fabrication d'un composant électronique ces dix dernières années.

Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Numéro de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prix de la tonne en \$ (y_i)	38	45	40	55	70	60	75	80	95	106

1-a/ Représenter le nuage de points associé à la série statistique (x_i, y_i) dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unités : 1 cm pour une année en abscisse et 1 cm pour dix dollars en ordonnée. (0,75 pt)

b/ Calculer les coordonnées du point moyen G. (0,5 pt)

2-a/ Calculer à 10^{-2} près par excès, le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i, y_i).

En déduire qu'un ajustement affine est justifié. (1 pt)

b/ Déterminer par la méthode des moindres carrés l'équation de la droite de régression linéaire (D) de y en x. (On donnera les coefficients à 10^{-2} près par excès). (0,5 pt)

c/ Tracer la droite (D) dans le même repère que celui du nuage des points. (0,25 pt)

3- En supposant que l'évolution se poursuive de la même façon dans les années à venir :

a/ Donner une estimation du prix de la tonne de cette terre rare en 2016. (0,25 pt)

b/ En quelle année le prix de la tonne de cette terre rare dépassera 180 \$? (0,75 pt)

Exercice 2 (4 points)

On considère l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}, z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$.

1- a/ Vérifier que i est solution de (E). (0,25 pt)

b/ Déterminer les nombres réels a, b et c tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)(az^2 + bz + c). \quad (0,5 \text{ pt})$$

c/ En déduire les solutions de (E). (0,5 pt)

2- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal ($o, \vec{u}, \vec{v}$), on désigne par A, B et C les points d'affixe $z_A = i$, $z_B = 2 + 3i$ et $z_C = 2 - 3i$.

a/ Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Déterminer l'affixe $z_{A'}$ du point A' image de A par r. (0,75 pt)

b/ Calculer $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_{A'}}$. En déduire l'existence d'une homothétie h de centre B qui transforme A' en C et préciser son rapport. (1 pt)

3- On considère la transformation plane s définie par : $s = \text{hor}$

a/ Quelle est l'image de A par s. (0,25 pt)

b/ Préciser la nature et les éléments géométriques de s. (0,75 pt)

Problème (12 points)

Soit k un entier naturel non nul. On considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = x^k(e^{-x} - \frac{1}{2})$.

On note (C_k) la courbe représentative de f_k dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct ($o, \vec{i}, \vec{j}$) (unité graphique : 4 cm).

Partie A (5 pts)

- 1-a/ Etudier la limite de f_k en $+\infty$. (0,25 pt)
 b/ Etudier, suivant la parité de k , la limite de f_k en $-\infty$. (0,5 pt)
 2- Calculer la fonction dérivée de f_k , puis montrer que pour tout x réel, $f'_k(x) = x^{k-1} g_k(x)$ où
 $g_k(x) = (k-x)e^{-x} - \frac{k}{2}$. (0,5 pt)
 3- a/ Etudier les variations de g_k . (1,25 pts)
 b/ En déduire que l'équation $g_k(x) = 0$, admet une unique solution α_k dans $\mathbb{R}$ et que α_k est strictement positif. (0,75 pt)
 c/ Déterminer le signe de g_k sur $\mathbb{R}$. (0,25 pt)
 En déduire le signe de f'_k sur $\mathbb{R}$ (distinguer k pair et k impair). (0,5 pt)
 d/ Dresser le tableau de variation de f_k . (1 pt)

Partie B (7 pts)

Dans cette partie, on prend $k = 1$. Donc $f_1(x) = xe^{-x} - \frac{x}{2}$ et $g_1(x) = (1-x)e^{-x} - \frac{1}{2}$.

- 1-a/ Montrer que $0 < \alpha_1 < \frac{1}{2}$. (0,25 pt)
 b/ En utilisant g_1 , montrer que $e^{-\alpha_1} = \frac{1}{2(1-\alpha_1)}$. (0,25 pt)
 En déduire l'expression de $f_1(\alpha_1)$ ne contenant pas $e^{-\alpha_1}$. (0,25 pt)
 c/ Déduire de A-3d/ le tableau de variation de f_1 . (0,25 pt)
 2- Montrer que la courbe (C_1) possède une asymptote (D) en $+\infty$ dont on précisera une équation. (0,25 pt)
 3- Soit la fonction φ définie sur $[0; \frac{1}{2}]$ par $\varphi(x) = 1 - \frac{e^x}{2}$.
 a/ Démontrer que α_1 est l'unique solution de l'équation : $\varphi(x) = x$. (0,25 pt)
 b/ Démontrer que pour tout x élément de $[0; \frac{1}{2}]$, $\varphi(x)$ est aussi élément de $[0; \frac{1}{2}]$. (0,5 pt)
 c/ Démontrer que pour tout x élément de $[0; \frac{1}{2}]$, on a : $|\varphi'(x)| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}$. (0,25 pt)
 4- On définit la suite numérique (U_n) par :
 $U_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = \varphi(U_n)$.
 a/ Démontrer que (U_n) est une suite d'éléments de $[0; \frac{1}{2}]$. (0,5 pt)
 b/ Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :
 $|U_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{\sqrt{e}}{2} |U_n - \alpha_1|$. (0,5 pt)
 c/ Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $|U_n - \alpha_1| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^n$. (0,75 pt)
 En déduire que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite. (0,5 pt)
 5-a/ Etudier le signe de f_1 sur $\mathbb{R}$. (0,25 pt)
 b/ On donne $\alpha_1 \approx 0,315$. Construire (C_1) et (D) dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$. (1,25 pts)
 6-a/ Déterminer les nombres réels a et b tels que, la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par
 $H(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit une primitive de la fonction : $x \mapsto xe^{-x}$. (0,5 pt)
 b/ Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_1) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. (0,5 pt)