

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE OFFICE DU BACCALAUREAT	BACCALAUREAT 2013	DURÉE : 4 H
	MATHÉMATIQUES	Coef. : 5
	SÉRIE C	

SESSION NORMALE

Exercice 1 (03 points)

- 1- Résoudre dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $4z^4 + 3z^2 + 1 = 0$.
Montrer que les solutions sont conjuguées deux à deux. (1,25 pts)
- 2- Écrire le polynôme $4z^4 + 3z^2 + 1$ sous la forme d'un produit de deux trinômes du second degré à coefficients réels. (0,5 pt)
- 3- En déduire que dans tout système de numération de base b supérieure ou égale à cinq, le nombre $\overline{40301}$ est multiple de $\overline{211}$ (ces deux nombres sont écrits en base b).
On prend b égal à neuf ; écrire dans cette base le quotient de $\overline{40301}$ par $\overline{211}$. (1,25 pts)

Exercice 2 (06 points)

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit u un nombre réel et f_u l'application de (P) dans (P) qui à tout point M de (P) de coordonnées (x, y) associe le point M' dont les coordonnées (x', y') sont :

$$\begin{cases} x' = x + 2u \\ y' = ux + y + u^2 \end{cases}$$

- 1- Démontrer que f_u est bijective ; déterminer f_u^{-1} . (0,5 pt)
- 2- Démontrer que la parabole Γ , d'équation $y = \frac{x^2}{4}$ est globalement invariante par f_u . (0,5 pt)
- 3- On définit une suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de point de (P) de la façon suivante :
 $M_1 = f_{\frac{1}{2}}(O)$; $M_2 = f_{\frac{1}{2^2}}(M_1)$, ..., $M_n = f_{\frac{1}{2^n}}(M_{n-1})$.
 - a/ Justifier que, pour tout entier naturel n , $M_n \in \Gamma$. (0,5 pt)
 - b/ Exprimer les coordonnées (x_n, y_n) de M_n en fonction de n . (0,75 pt)
 - c/ Le point M_n a-t-il une position limite lorsque n tend vers $+\infty$? Déterminer cette position. (0,25 pt)
 - d/ Soit G_n l'isobarycentre des points $M_1, M_2, \dots, M_n$. Exprimer en fonction de n les coordonnées (X_n, Y_n) de G_n . (0,75 pt)
 - e/ Le point G_n a-t-il une position limite lorsque n tend vers $+\infty$? Déterminer cette position. (0,25 pt)
- 4- Soit I_n le point d'intersection des tangentes à Γ aux points M_n et M_{n+1} .
 - a/ Exprimer, en fonction de n , les coordonnées (X'_n, Y'_n) de I_n . (1 pt)
 - b/ Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{2}{9} (X'_n - 2)^2$. (0,25 pt)
 - c/ Montrer que, pour tout entier non nul n , le point I_n appartient à une parabole Γ' . (0,25 pt)
 - d/ Déterminer les éléments caractéristiques de Γ' . (1 pt)

Problème (11 points)

On considère la fonction numérique g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = (1 - e^{-x}) \ln x \quad \forall x \in]0; 1] \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

I/

- 1- Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^{-x}}{x} = 1$. (0,25 pt)
- 2- Démontrer que g est continue sur $[0; 1]$. (0,25 pt)
- 3- Etudier la dérivabilité de g sur $[0; 1]$ et montrer que pour tout x de $]0; 1]$,
 $g'(x) = \frac{e^{-x}}{x} (x \ln x + e^x - 1)$. (0,75 pt)
- 4- Soit f la fonction numérique définie sur $]0; 1]$ par $f(x) = x \ln x + e^x - 1$.
 a/ Etudier le sens de variation de f' et démontrer que f' s'annule une seule fois sur $]0; 1]$ en un point x_0 (On ne calculera pas x_0). (1 pt)
 b/ En déduire le signe de $f'(x)$ puis démontrer que f s'annule une seule fois sur $]x_0; 1]$ pour une valeur x_1 . (On ne calculera pas x_1). (0,75 pt)
- 5- Dresser le tableau de variation de g . (0,75 pt)
- 6- Construire la courbe de g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 10 cm) ;
 On prendra $x_1 = 0,31$. (1 pt)

II/ Soit n un entier naturel, on définit sur $[0; 1]$ les fonctions φ_i , $i \in \mathbb{N}$ par :

- $$\varphi_0(x) = 1; \varphi_1(x) = 1-x; \varphi_2(x) = 1-x + \frac{x^2}{2!} \text{ et pour tout entier } n \text{ strictement supérieur à } 2,$$
- $$\varphi_n(x) = 1-x + \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}.$$
- 1- Démontrer que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x de $[0; 1]$ on a
 $\varphi'_n(x) = -\varphi_{n-1}(x)$. (0,5 pt)
 - 2- On se propose de démontrer que pour tout entier naturel n et pour tout réel x de $[0; 1]$;
 $\varphi_{2n+1}(x) \leq e^{-x} \leq \varphi_{2n}(x)$.
 a/ Soit Φ et Ψ deux fonctions continues sur $[0; 1]$ et dérivables sur $]0; 1]$ telles que
 $\Phi(0) = \Psi(0)$.
 Démontrer que si pour tout réel x de $]0; 1]$ $\Phi'(x) \leq \Psi'(x)$ alors pour tout x de $[0; 1]$
 $\Phi(x) \leq \Psi(x)$. (0,75 pt)
 b/ Démontrer par récurrence et en utilisant deux fois la question 2.a/ que pour tout x de $[0; 1]$ et
 pour tout entier naturel n , $\varphi_{2n+1}(x) \leq e^{-x} \leq \varphi_{2n}(x)$. (1,25 pts)
 c/ Pour tout entier naturel n , déduire de la question précédente un encadrement de la fonction g sur
 $]0; 1]$ faisant intervenir les fonctions φ_{2n} et φ_{2n+1} . (0,5 pt)

III/ On considère Δ l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x; y)$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ vérifiant $0 \leq x \leq 1$ et $g(x) \leq y \leq 0$. On se propose de déterminer l'aire de Δ .

- 1- Soit n un entier naturel et α un réel tel que $0 < \alpha \leq 1$. On pose $I_n(\alpha) = \int_{\alpha}^1 x^n \ln x \, dx$.
 Calculer $I_n(\alpha)$ en utilisant une intégration par parties. (0,75 pt)
- 2- Calculer $\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \alpha > 0}} I_n(\alpha)$. (0,25 pt)
- 3- En utilisant la question II.2.c/ donner un encadrement de $\int_{\alpha}^1 g(x) \, dx$ au moyen des intégrales de type $I_n(\alpha)$. En déduire un encadrement de $\int_0^1 g(x) \, dx$. (1,5 pts)
- 4- Donner un encadrement de l'aire de Δ en cm^2 d'amplitude 10^{-1} près. (0,75 pt)

Indication : Soit $\varepsilon \in]a; b]$ si $\lim_{\varepsilon \rightarrow a} \int_{\varepsilon}^b f(x) \, dx$ existe dans $\mathbb{R}$, alors $\lim_{\varepsilon \rightarrow a} \int_{\varepsilon}^b f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx$.