

Exercice11-Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$(1+i)z^2 - 2i(a+1)z + (i-1)(a^2+1)=0$$

a étant un paramètre :

$$\Delta' = [(a+1)]^2 - (1+i)(i-1)(a^2+1)$$

$$= -(a+1)^2 + 2(a^2+1)$$

$$= a^2 - 2a + 1$$

$$\Delta' = (a-1)^2$$

a-1 est une racine carrée de Δ' , les

solutions sont donc :

$$z' = \frac{i(a+1)-a+1}{1+i} \Rightarrow z' = 1+ia$$

$$z'' = \frac{i(a+1)+a-1}{1+i} \Rightarrow z'' = a+i$$

$$S = \{1+ia; a+i\}$$

2-Relation entre z_1 et z_2 indépendante de a

$$\begin{cases} z_1 = 1+ia \\ z_2 = a+i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} iz_1 = 1-a \\ z_2 = a+i \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_2 + iz_1 = 2i$$

$$z_2 + iz_1 = 2i \quad \text{ou} \quad iz_2 - z_1 = -2$$

Tenir compte de la permutation.

3- Caractérisation de f :

$$f : p \rightarrow qp$$

 $M_1(z_1) \mapsto M_2(z_2)$ a pour écriture

$$\text{complexe : } z_2 = iz_1 + 2i$$

f est une rotation d'angle orienté de mesure

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ et de centre } \Omega, d'afixe } z_0 = \frac{2i}{1+i} = 1+i$$

f est une similitude de rapport

$$k=1, d'angle orienté } \alpha = -\frac{\pi}{2} \text{ et de centre } \Omega.$$

Autre solution : dans le cas où $z_1 = a+i$ et

$$z_2 = 1+ia \text{ on a } z_2 = iz_1 + 2. \text{ On a :}$$

$$f = R_{(\Omega, \frac{\pi}{2})} \text{ avec } z_0 = 1+i.$$

4-a) Expression de x' et y' en fonction de x

$$\text{et } y : z_2 = -iz_1 + 2i, \text{ en posant } z_1 = x+iy \text{ et}$$

$$z_2 = x'+iy' \text{ on a : } x'+iy' = -i(x+iy) + 2i$$

$$= ix + y + 2i$$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = 2-x \end{cases}$$

Remarque : Dans le cas $z_2 = iz_1 + 2$ on a

$$\begin{cases} x' = 2-y \\ y' = x \end{cases}$$

$$x+2y-1=0.$$

b) Image par f de la droite d'équation

$$x+2y-1=0.$$

$$\begin{cases} x' = 2-y \\ y' = 2-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2-y' \\ y = x' \end{cases}$$

$$\text{Dans } x+2y-1=0 \text{ on a : } (2-y') + 2x'-1=0 \Rightarrow$$

$$2x'-y'+1=0. (D') \text{ a pour équation}$$

$$2x'-y'+1=0.$$

$$2x'-y'+1=0.$$

Remarque : Dans le 2ème cas : (D') a

$$\text{pour équation : } 2x'-y'-3=0$$

$$(E) : y''(x) + 2my'(x) + 3y(x) = 2(1-2x)e^x.$$

$$(E') : y'(x) - 2my'(x) + 3y(x) = 0 \text{ où } m \text{ est un}$$

paramètre réel.

1-Résolution de (E').

L'équation caractéristique d'inconnue

complexe r associée à (E') est :

$$r^2 - 2mr + 3 = 0 (*)$$

$$\Delta' = m^2 - 3.$$

Tableau de signe de Δ' :

m	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
Δ'	+	ϕ	-	ϕ

-Pour $m \in]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[$ $\Delta' > 0$

et (*) admet 2 solutions réelles distinctes

$$r_1 = m - \sqrt{m^2 - 3} \text{ et } r_2 = m + \sqrt{m^2 - 3} \text{ et}$$

(E') a pour solution :

$$f(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

-Pour $m = -\sqrt{3}$, $\Delta' = 0$ et (*) admet unesolution double $r_0 = -\sqrt{3}$ et

(E') a pour solution :

$$f(x) = (Ax+B)e^{-x\sqrt{3}} \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

-Pour $m = \sqrt{3}$, $\Delta' = 0$ et (*) admet unesolution double $r_0 = \sqrt{3}$ et

(E') a pour solution :

$$f(x) = (Ax+B)e^{x\sqrt{3}} \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

-Pour $m \in]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[$; $\Delta' < 0$ et (*) admet

2 solutions complexes conjuguées

$$r_1 = m - i\sqrt{3} - m^2 \text{ et } r_2 = m + i\sqrt{3} - m^2 \text{ et}$$

(E') a pour solution :

$$f(x) = [A \cos(x\sqrt{3} - m^2) + B \sin(x\sqrt{3} - m^2)] e^{mx} \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

$$BS \sin(x\sqrt{3} - m^2) e^{mx} \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

2-Détermination de m :

$$h : x \mapsto x^2 e^x \text{ est une solution de (E)}$$

$$\Rightarrow h'(x) = 2mx e^x + 3h(x) = 2(1-2x) e^x \text{ pour}$$

$$\text{tout } x \in \mathbb{R} \text{ or } h'(x) = (x^2 + 2x) e^x \text{ et}$$

$$h''(x) = (x^2 + 4x + 2) e^x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a :}$$

$$(x^2 + 4x + 2) - 2m(x^2 + 2x) e^x + 3x^2 e^x = 2(1-2x) e^x$$

$$\text{ce qui conduit à } \begin{cases} 4 - 2m = 0 \\ 4 - 4m = 0 \end{cases} \text{ d'où } m = 2$$

3-On pose $m=2$

$$(E) : y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 2(1-2x) e^x$$

$$(E') : y'(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 0$$

$$a) -a_1) \phi \text{ est solution de (E)} \Rightarrow$$

$$\phi''(x) - 4\phi'(x) + 3\phi(x) = 2(1-2x) e^x (1) \text{ or}$$

$$h''(x) - 4h'(x) + 3h(x) = 2(1-2x) e^x (2)$$

$$(1) \Leftrightarrow 2 \Rightarrow [\phi''(x) - 4\phi'(x) + 3\phi(x)] -$$

$$[h''(x) - 4h'(x) + 3h(x)] = 0 \Rightarrow$$

$$(\phi-h)''(x) - 4(\phi-h)'(x) + 3(\phi-h)(x) = 0$$

$$\text{d'où } \phi-h \text{ est une solution de (E')}$$

$$a_2) (\phi-h) \text{ est une solution de (E')} \Rightarrow$$

$$(\phi-h)''(x) - 4(\phi-h)'(x) + 3(\phi-h)(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\phi''(x) - 4\phi'(x) + 3\phi(x) = h''(x) - 4h'(x) + 3h(x)$$

$$3h(x) \text{ or } h''(x) - 4h'(x) + 3h(x) = 2(1-2x) e^x$$

$$\text{d'où } \phi''(x) - 4\phi'(x) + 3\phi(x) = 2(1-2x) e^x \text{ donc}$$

 ϕ est solution de (E')

b) ♦ Résolution de (E') :

$$2\epsilon \in]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[, \text{ les solutions}$$

$$\text{de (*) sont } r_1 = 1 \text{ et } r_2 = 3.$$

$$[k(x) = Ae^{x} + Be^{3x} \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

♦ Résolution de (E) :

$$\text{Posons } k = \phi - h, \phi(x) - h(x) = k(x) \Rightarrow$$

$$\phi(x) = k(x) + h(x) \text{ est la solution de (E).}$$

$$\phi(x) = A e^x + B e^{3x} + x^2 e^x \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

c) Solution particulière :

$$* \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in (C) \Rightarrow f'(0) = -1$$

$$\Rightarrow A+B = -1$$

$$* \text{La tangente à pour coefficient}$$

directeur 1 $\Rightarrow f'(0) = 1.$

$$f(x) = A e^x + B e^{3x} + x^2 e^x$$

$$f'(x) = (x^2 + 2x + A) e^x + 3B e^{3x}$$

$$f'(0) = 1 \Rightarrow A + 3B = 1$$

$$\begin{cases} A + B = -1 \\ A + 3B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = (x^2 - 2) e^x + e^{3x}$$

$$4-g(x) = (x^2 - 2) e^x + e^{3x} \text{ et } U \text{ une primitive}$$

de la fonction $x \mapsto 2(1-2x) e^x$

$$g \text{ est une solution de (E)} \Rightarrow$$

$$g''(x) - 4g'(x) + 3g(x) = 2(1-2x) e^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$g'(x) - 4g(x) + 3G(x) = U(x) + c \text{ avec } c \in \mathbb{R} \text{ et } G$$

$$\text{une primitive de } g; \text{ on a : } G \text{ définie par } G(x)$$

$$\text{par } G(x) = \frac{1}{3} [U(x) - g'(x) + 4g(x) + c] \text{ avec}$$

$$c \in \mathbb{R} \text{ est une primitive de } g.$$

$$\text{Pour } c=0 \quad G(x) = \frac{1}{3} [U(x) - g'(x) + 4g(x)] \text{ est}$$

$$\text{une primitive de } g \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$\diamond \text{ Autre méthode.}$$

$$g' \text{ solution de (E')} \Rightarrow$$

$$g''(x) - 4g'(x) + 3g'(x) = U'(x) \Rightarrow$$

$$g(x) = \frac{1}{3} [U'(x) - g''(x) + 4g'(x)] \text{ et donc } G$$

$$\text{définie par : } G(x) = \frac{1}{3} [U(x) - g'(x) + 4g(x)]$$

$$\text{est une primitive de } g \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$b) \text{ Expression de } U(x) \text{ sous forme de}$$

$$(ax+b) e^x$$

$$U(x) = (ax+b) e^x ; U'(x) = (ax+b+a) e^x.$$

$$U''(x) = 2(1-2x) e^x \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 6 \end{cases}$$

$$U(x) = (-4x+6) e^x \Rightarrow U(x) = 2(3-2x) e^x$$

$$c) \text{ Détermination de la primitive } G$$

$$G(x) = \frac{1}{3} [U(x) - g'(x) + 4g(x)] =$$

$$\frac{1}{3}[(6-4x)e^x - (x^2-2)e^x - 2xe^x - 3e^x + 4(x^2-2)e^x + 4e^{3x}]$$

$$G(x) = (x^2 - 2x)e^x + \frac{1}{3}e^{3x}$$

PROBLEME

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^{x+1}}, x \in [0; +\infty[$$

PARTIE A

G est la fonction définie par $g(x) = x + 2 - e^x$ pour $x \in [0; +\infty[$.

1-Sens de variation de g :

g est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $g'(x) = 1 - e^x \forall x \in [0; +\infty[$

Tableau de signe

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	

$\forall x \in [0; +\infty[$ $g'(x) \leq 0$ et pour $x \neq 0$,

$g'(x) \neq 0$ donc g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

*Calcul de limite à $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2 - e^x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x} \right)$$

$$= -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

2-a) Montrons :

g est continue et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ avec $g(0) = 1$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \text{ on a donc}$$

$g([0; +\infty[) =]-\infty; 1]$ qui contient zero d'où l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; +\infty[$.

b) Déduction de l'encadrement.

$$g(1,14) \approx 0,01 \text{ et } g(1,15) \approx -0,08$$

$$g(1,14) > g(\alpha) > g(1,15) \Rightarrow$$

$1,14 < \alpha < 1,15$ car g est décroissante sur $[0; +\infty[$.

3-Déduction du signe de g :

D'après le sens de variation de g on déduit son tableau de signe :

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		Φ	

$\forall x \in [0; \alpha], g(x) > 0$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0, g(\alpha) = 0$.

PARTIE B

$$1-a) f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^{x+1}}, \forall x \in [0; +\infty[$$

F est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $\forall x \in [0; +\infty[$ on a :

$$f'(x) = \frac{e^x(xe^{x+1} + 1) - (e^x - 1)(1+x)e^x}{(2+x-e^x)^2 e^x}$$

$$= \frac{(x+1)e^x + 1}{(2+x-e^x)^2 e^x}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)e^x}{(x+1)^2}$$

d'où le résultat.

b) Signe de $f'(x)$ et sens de variation de f.

$f'(x)$ a le même signe que g car

$$\forall x \in [0; +\infty[, \frac{e^x}{(x+1)^2} > 0.$$

On en déduit alors d'après le signe de g que f est croissante sur $[0; \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.

2-a) Montrons :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^{x+1}}$$

$$= \frac{e^x - e^x e^{-x}}{xe^{x+1} e^{-x}} \text{ car } e^x e^{-x} = 1$$

$$= \frac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(x+1)} \text{ et comme } e^x \neq 0 \text{ on a}$$

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$$

b) Calcul de limite en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} \right)$$

$$= 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} = 1$$

On en déduit que l'axe des abscisses ($y=0$) est l'asymptote à (Φ) à $+\infty$.

3-a) Calcul de $f(\alpha)$.

$$f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^{\alpha+1}} \text{ or } g(\alpha) = 0 \Rightarrow e^\alpha = \alpha + 2 \text{ et donc}$$

$$f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha(\alpha+2) + 1} \Rightarrow f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1} \text{ d'où le résultat.}$$

b) Encadrement de $f(\alpha)$.

$$1,14 < \alpha < 1,15 \Rightarrow 2,14 < \alpha + 1 < 2,15$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2,15} < \frac{1}{\alpha+1} < \frac{1}{2,14}$$

d'où $0,46 < f(\alpha) < 0,47$ à 10^{-2} près.

4-Equation de la tangente (T).

(T) : $y = f(0)x + f(0)$ or $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ d'où (T) : $y = x$

$$5-a) \text{ Calcul de } f(x) - x.$$

$$f(x) - x = \frac{e^x - 1}{xe^{x+1}} - x = \frac{e^x - 1 - x^2 e^x}{xe^{x+1}}$$

$$= \frac{(1-x^2)e^x - (x+1)}{(1+x)^2 e^{x+1}} = \frac{x^2 e^x + 1}{(1+x)^2 e^{x+1}}$$

b) Sens de variation de φ .

φ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout $x \in [0; +\infty[, \varphi'(x) = -x e^x$

Or $\forall x \in [0; +\infty[, x e^x > 0$ et pour $x \neq 0, \varphi'(x) \neq 0$ donc φ est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

*Dédution du signe de φ .

$0 < x \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(0) \Rightarrow \varphi(x) < 0$ car $\varphi(0) = 0$

Tableau de signe de φ

x	0	$+\infty$
$\varphi(x)$	0	-

$\forall x \in [0; +\infty[, \varphi(x) < 0; \varphi(0) = 0$.

c) Position relative de (Φ) et (T) : le signe de $f(x) - x$ revient à celui de $\varphi(x)$ d'après 5-a).

d) Voir figure ci-dessous.

PARTIE C :

1-Recherche d'une primitive de f.

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} \forall x \in [0; +\infty[$$

$x \mapsto F(x) = \ln(x + e^{-x})$ est une primitive de f sur $[0; +\infty[$ car $f(x) = \frac{(x+e^{-x})'}{x+e^{-x}}$ forme $\frac{u'}{u}$

or $x + e^{-x} > 0 \forall x \in]\alpha; +\infty[$ d'où $x \mapsto F(x) = \ln(x + e^{-x})$ est une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

2-Calcul d'aire :

$$(D) : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) \leq y \leq x \end{cases}$$

$$A_1(D) = \int_0^1 (x - f(x)) du \text{ u.l.a. or } U.a = 4 \text{ cm}^2$$

$$A_1(D) = \left[\frac{1}{2} x^2 - \ln(x + e^{-x}) \right]_0^1 x \text{ u.a}$$

$$A_1(D) = [2 - 4 \ln(1 + e^{-1})] \text{ cm}^2.$$

3- $V_k = \int_k^{k+1} f(x) dx, k \in \mathbb{N}$.

a) Calcul de V_0, V_1 , et V_2 .

$$V_0 = \int_0^1 f(x) dx = \ln(1 + e^{-1}) = \ln\left(\frac{1+e}{e}\right)$$

$$V_1 = \int_1^2 f(x) dx = \ln\left(\frac{1+2e^2}{e+e^2}\right)$$

$$V_2 = \int_2^3 f(x) dx = \ln\left(\frac{1+3e^3}{e+2e^3}\right)$$

b) Pour $k \geq 2$.

f est décroissante sur $[0; +\infty[$ et donc décroissante sur $[k; k+1]$ car $\alpha < k$ pour $k \geq 2$.

$$k \leq x \leq k+1 \Rightarrow f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \Rightarrow$$

$$\int_k^{k+1} f(k+1) dx \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} f(k) dx$$

$$\Rightarrow f(k+1) \leq V_k \leq f(k) \text{ d'où le résultat}$$

c) Calcul de limite :

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(k) = 0$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(k+1) = 0$.

D'où $\lim_{k \rightarrow +\infty} V_k = 0$.

NB : Partie C : b) autre méthode - Inégalité de la moyenne appliquée à f sur $[k; k+1]$.

- Utilisation des rectangles d'aire $f(k+1)$ et $f(k)$ construits sur $[k; k+1]$