

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE OFFICE DU BACCALAUREAT	BACCALAUREAT 2013	DURÉE : 4 H
	MATHÉMATIQUES	Coef. : 3
	SÉRIE D	

SESSION NORMALE

Exercice 1 (4 points)

Soit a un nombre complexe.

1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(1+i)z^2 - 2i(a+1)z + (i-1)(a^2+1) = 0.$$

(1 pt)

2- Soient z_1 et z_2 les solutions de cette équation.

Trouver entre z_1 et z_2 une relation indépendante de a .

(0,5 pt)

3- Caractériser la transformation f du plan complexe qui, à tout point M_1 d'affixe z_1 associe le point M_2 d'affixe z_2 .

(1 pt)

4- On pose $z_1 = x + iy$ et $z_2 = x' + iy'$.

(1 pt)

a/ Exprimer x' et y' en fonction de x et y .

(0,5 pt)

b/ Quelle est l'image par f de la droite (D) d'équation : $x + 2y - 1 = 0$?

Exercice 2 (4,5 points)

On considère les équations différentielles suivantes

$$(E) : y''(x) - 2my'(x) + 3y(x) = 2(1-2x)e^x,$$

$$(E') : y''(x) - 2my'(x) + 3y(x) = 0 ; \text{ dans lesquelles } m \text{ est un paramètre réel.}$$

(0,75 pt)

1- Résoudre, suivant les valeurs de m , l'équation (E') .

2- Déterminer la valeur de m pour laquelle, la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 e^x$ est une solution de (E) .

(0,5 pt)

3- Dans cette question, on donne $m = 2$.

a/ Soit φ une fonction au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

a₁/ Montrer que si φ est une solution de (E) alors $(\varphi - h)$ est une solution de (E') .

(0,5 pt)

a₂/ Montrer que si $(\varphi - h)$ est une solution de (E') alors φ est une solution de (E) .

(0,5 pt)

b/ Dédire de 1-, la résolution de (E') ; puis résoudre (E) .

(0,5 pt)

c/ Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative, dans le plan rapporté à un repère orthonormé passe par le point $\Omega(0; -1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1.

(0,5 pt)

4- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x^2 - 2)e^x + e^{3x}$ et U une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \mapsto 2(1-2x)e^x$.

a/ Sachant que g est une solution de (E) , montrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x) = \frac{1}{3} [U(x) - g'(x) + 4g(x)] \text{ est une primitive de } g \text{ sur } \mathbb{R}.$$

(0,5 pt)

b/ Déterminer une expression de $U(x)$ de la forme : $U(x) = (ax + b)e^x$ où a et b sont des constantes réelles.

(0,5 pt)

c/ En déduire $G(x)$.

(0,25 pt)

Problème (11,5 points)

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.

A/

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$.

1- Etudier le sens de variation de g sur $[0; +\infty[$ et déterminer la limite de g en $+\infty$. (1 pt)

2- a/ Montrer que l'équation : $g(x) = 0$ admet une et une seule solution dans $[0; +\infty[$. (0,5 pt)

On note α cette solution.

b/ Prouver que : $1,14 < \alpha < 1,15$. (0,5 pt)

3- En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x . (0,5 pt)

B/

1- a/ Montrer que, pour tout x appartenant à $[0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$. (0,5 pt)

b/ En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0; +\infty[$. (0,25 pt)

2- a/ Montrer que, pour tout réel positif x , $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$. (0,25 pt)

b/ En déduire la limite de f en $+\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat trouvé. (0,5 pt)

3- a/ Etablir que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$. (0,5 pt)

b/ En utilisant l'encadrement de α établi dans la question A/2-, donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2} . (0,25 pt)

4- Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0. (0,25 pt)

5- a/ Etablir que pour tout x appartenant à $[0; +\infty[$,

$f(x) - x = \frac{(x+1)\varphi(x)}{xe^x + 1}$ avec $\varphi(x) = e^x - xe^x - 1$. (0,5 pt)

b/ Etudier le sens de variation de φ sur $[0; +\infty[$. (0,5 pt)

En déduire le signe $\varphi(x)$ sur $[0; +\infty[$. (0,25 pt)

c/ Déduire des questions précédentes la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T). (0,25 pt)

d/ Tracer (C) et (T). (1,5 pts)

C/

1- Déterminer une primitive F de f sur $[0; +\infty[$; on pourra utiliser l'expression de $f(x)$ établie en B/2-. (0,5 pt)

On note D le domaine du plan limité par la courbe (C), la tangente (T), les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

2- Calculer en cm^2 l'aire A du domaine D. (0,5 pt)

3- Pour tout entier naturel k , on pose $V_k = \int_k^{k+1} f(x) dx$.

a/ Calculer V_0 , V_1 et V_2 . (1 pt)

b/ Démontrer que pour tout entier naturel $k \geq 2$, $f(k+1) \leq V_k \leq f(k)$. (1 pt)

c/ Déduire la limite de V_k quand k tend vers $+\infty$. (0,5 pt)