

EXERCICE 1

$$(E) / z \in \mathbb{C}, z^n = \frac{9\sqrt{3} + 27i}{2}, n \in \mathbb{N}^*$$

1) Les solutions z_k de (E) $\left| \begin{array}{l} \text{0,25 pt} \\ \text{arg: 0,25 pt} \end{array} \right.$

$$\text{On a: } z^n = 9\sqrt{3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$= 9\sqrt{3} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \left| \begin{array}{l} \text{mod: 0,25 pt} \\ \text{arg: 0,25 pt} \end{array} \right.$$

Posons $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n = 9\sqrt{3} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r^n = 9\sqrt{3} \\ n\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \{1, 2, \dots, n-1\} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt[n]{9\sqrt{3}} \quad (0,25 \text{ pt}) \\ \theta = \frac{2\pi + 6k\pi}{3n}, k \in \{1, 2, \dots, n-1\} \quad (0,25 \text{ pt}) \end{array} \right.$$

$$z_k = \sqrt[n]{9\sqrt{3}} \left(\cos \frac{2\pi + 6k\pi}{3n} + i \sin \frac{2\pi + 6k\pi}{3n} \right)$$

$$k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$$

2) $n = 5$ d'après 1) on a:

$$z_k = \sqrt[5]{9\sqrt{3}} \left(\cos \frac{2\pi + 6k\pi}{15} + i \sin \frac{2\pi + 6k\pi}{15} \right)$$

$$\sqrt[5]{9\sqrt{3}} = \sqrt[5]{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$z_k = \sqrt{3} \left(\cos \frac{2\pi + 6k\pi}{15} + i \sin \frac{2\pi + 6k\pi}{15} \right)$$

$$k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

Les points images sont les sommets d'un pentagone

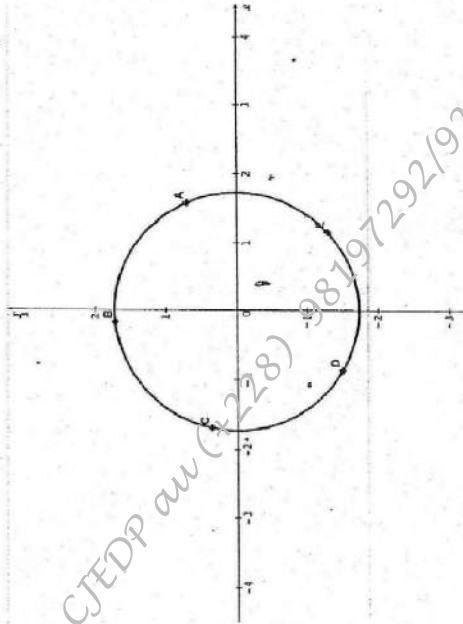
régulier inscrit dans le cercle $C(0, \sqrt{3})$.

Soit $A(z_0)$ avec $z_0 = \sqrt{3} \left(\cos \frac{2\pi}{15} + i \sin \frac{2\pi}{15} \right)$

Construction: 1 pt

$$OA = \sqrt{3}, \text{ Mes}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}) = \frac{2\pi}{15} \text{ rad} = 24^\circ$$

Le point $B(z_1)$ est tel que $\text{Mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{2\pi}{5}$ et ainsi de suite pour les points $C(z_2), D(z_3), E(z_4)$



Méthode:

$$z_0 = \sqrt{3} \left(\cos \frac{2\pi}{15} + i \sin \frac{2\pi}{15} \right); z_1 = \sqrt{3} \left(\cos \frac{8\pi}{15} + i \sin \frac{8\pi}{15} \right)$$

$$z_2 = \sqrt{3} \left(\cos \frac{14\pi}{15} + i \sin \frac{14\pi}{15} \right); z_3 = \sqrt{3} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

$$z_4 = \sqrt{3} \left(\cos \frac{26\pi}{15} + i \sin \frac{26\pi}{15} \right)$$

$$3) \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$a) j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Expression de α en fonction de j

$$\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i = \sqrt{3} \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \Rightarrow \boxed{\alpha = \sqrt{3}j} \quad (0,25 \text{ pt})$$

Autre: $\alpha = -\overline{j} - 2i$

b) Montrons que α est une solution de $z^5 = \frac{-9\sqrt{3} + 27i}{2}$

$$\alpha^5 = (\sqrt{3}j)^5 = 9\sqrt{3} \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 9\sqrt{3} \left(\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

$$= 9\sqrt{3} \left(\cos \left(-\frac{10\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{10\pi}{3} \right) \right); \text{ or } -\frac{10\pi}{3} = -4\pi + \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{donc } \alpha^5 = 9\sqrt{3} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 9\sqrt{3} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (0,25 \text{ pt})$$

$$\alpha^5 = \frac{-9\sqrt{3} + 27i}{2} \quad (0,25 \text{ pt}) \quad \text{d'où } \alpha \text{ est solution de}$$

l'équation $z^5 = \frac{-9\sqrt{3} + 27i}{2}$

4) $T: P \rightarrow P; M(z) \mapsto M(z')$

$$z' = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \right) z + \frac{5 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i$$

a) Forme algébrique de $w = (1-i)(2 + \sqrt{3} + i)$

$$\boxed{w = 5 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})i} \quad (0,25 \text{ pt})$$

b) • Nature de T : z est de la forme $az + b$ avec

$a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. T est similitude plane directe $(0,25 \text{ pt})$

• Éléments caractéristiques:

$$\left| -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \right| = \sqrt{3}; \arg \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \right) = \arg \alpha$$

$$= \arg \sqrt{3} + \arg j = 0 + \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, 0, 2, 5 \text{ pt}$$

Longue orientée de T a pour mesure $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$z' = z \Rightarrow z = -\frac{5+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i = 1-i, 0, 2, 5 \text{ pt}$$

$$1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \right)$$

On conclut que T est une similitude directe de rapport

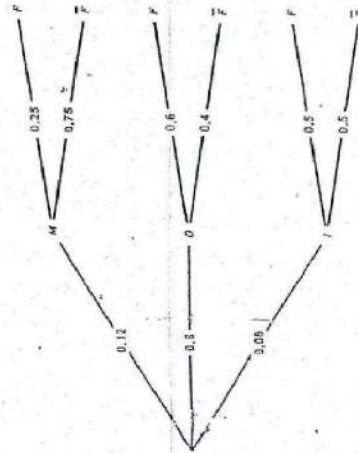
$$\sqrt{3}, d'angle -\frac{2\pi}{3} \text{ et de centre d'affixe } 1-i$$

EXERCICE 2

$$p(I) = 8\% = 0,08; p(O) = 80\%; p_I(F) = 50\% = 0,5$$

$$p_M(F) = 25\% = 0,25; p_O(F) = 60\% = 0,6$$

1) Arbre pondéré



2) Calcul de probabilité

a) d'interroger un agent de maintenance

$$p(M) = 1 - p(\overline{M}) = 1 - p(I \cup O) = 0,25 \text{ pt}$$

$$= 1 - p(I) + p(O) = \boxed{p(M) = 0,12} \quad 0,25 \text{ pt}$$

b) d'interroger une femme agent de maintenance

$$p(F \cap M) = p(F) \cdot p(M) = 0,25 \text{ pt}$$

$$= 0,12(0,25) \quad \boxed{p(F \cap M) = 0,03} \quad 0,25 \text{ pt}$$

c) d'interroger une femme

$$p(F) = p(F \cap M) + p(F \cap O) + p(F \cap I) = 0,25 \text{ pt}$$

$$p(F \cap O) = p(O) \cdot p(F) = (0,8)(0,6) = 0,48$$

$$p(F \cap I) = p(I) \cdot p(F) = (0,08)(0,5) = 0,04$$

$$p(F) = 0,03 + 0,48 + 0,04 \quad \boxed{p(F) = 0,55} \quad 0,25 \text{ pt}$$

3) A << l'alarme se déclenche >>

B << une panne se produise >>

a) Démontrons que $p(B \cap A) = 0,037$

$$p(\overline{B}) = p(B \cap A) + p(\overline{B} \cap A)$$

$$p(B \cap \overline{A}) = p(B) - p(B \cap A)$$

$$p(B) = 0,04 \text{ et } p(B \cap \overline{A}) = 0,003 \quad 0,25 \text{ pt}$$

$$= 0,04 + 0,003 = 0,037 \quad 0,25 \text{ pt}$$

b) Calcul de $p(A)$

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B}) \quad 0,25 \text{ pt}$$

$$= 0,037 + 0,002 \Rightarrow \boxed{p(A) = 0,039} \quad 0,25 \text{ pt}$$

c) Calcul de $p_A(B)$

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0,037}{0,039} \quad 0,25 \text{ pt}$$

$$\boxed{p_A(B) = 0,9487} \quad 0,25 \text{ pt}$$

PROBLEME

$$A) \begin{cases} f(x) = -x + e^{\frac{x}{2}} - 3 \text{ si } x < 0 \\ f(x) = 2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 2 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

1a) Continuité en 0 de f

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x + e^{\frac{x}{2}} - 3) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 2) = -2 \quad 0,25 \text{ pt}$$

$$f(0) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = -2$$

donc f est continue en 0 $0,25 \text{ pt}$

b) Montrons que $u \neq 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{x} = \frac{1}{u}$

Posons $k(x) = e^x$ on a $k(0) = 1$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k(x) - k(0)}{x - 0}, k \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k(x) - k(0)}{x} = k'(0) \text{ et } k'(x) = \frac{1}{x} e^x \text{ donc}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{u} e^u = \frac{1}{u} \quad 0,25 \text{ pt}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x + e^{\frac{x}{2}} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-1 + \frac{e^{\frac{x}{2}} - 1}{x} \right)$$

$$= -1 + \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) + 2}{x} = -\frac{1}{2} \quad 0,25 \text{ pt}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2x^2 e^{\frac{x}{2}}}{x} \right) = 0 \quad 0,25 \text{ pt}$$

Interprétation:

* Analytique: f n'est pas dérivable en 0 car

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)+2}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)+2}{x} \quad 0,25 \text{ pt}$$

*Géométrique : (C) admet au point $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ deux demi

tangentes de coefficient directeur $-\frac{1}{2}$ et 0 $0,25 \text{ pt}$

2) Sens de variations de f

$x \mapsto -x + e^{\frac{x}{2}} - 3$ est dérivable sur $]-\infty; 0[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, f'(x) = -1 + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = \frac{-2 + e^{\frac{x}{2}}}{2} \quad 0,25 \text{ pt}$$

$$-2 + e^{\frac{x}{2}} = 0 \Leftrightarrow x = 2 \ln 2$$

x	$-\infty$	0
$f(x)$		-

f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ $0,25 \text{ pt}$

$x \mapsto 2xe^{\frac{x}{2}} - 2$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = 2 \left(2xe^{\frac{x}{2}} + \frac{x^2 e^{\frac{x}{2}}}{2} \right) = (x^2 + 4x)e^{\frac{x}{2}} \quad 0,25 \text{ pt}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) > 0$ car $x^2 + 4x > 0$ et $e^{\frac{x}{2}}$ donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ $0,25 \text{ pt}$

*Limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x + e^{\frac{x}{2}} - 3 \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 2 \right) = +\infty \quad 0,25 \text{ pt}$$

*Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

0,25 pt

3a) Montrons que $f(x) = 0$ admet 2 solutions α et β telles que $\alpha < 0 < \beta < 1$

* f est une fonction continue strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et $f(]-\infty; 0]) =]-\infty; -2[$ $0,25 \text{ pt}$

or $0 \in]-\infty; -2[$ donc $f(x) = 0$ admet une unique

solution $\alpha \in]-\infty; 0[$ d'où $\alpha < 0$ $0,25 \text{ pt}$

* f est une fonction continue strictement croissante $]0; +\infty[$ et $f(]0; +\infty[) =]-2; +\infty[$ $0,25 \text{ pt}$

or $0 \in]-2; +\infty[$ donc $f(x) = 0$ admet une unique

solution $\beta \in]0; +\infty[$ $0,25 \text{ pt}$

$f(1) \approx 0,297$ et $f(0) = -2$. On a $f(0), f(1) < 0$

donc $0 < \beta < 1$. L'équation $f(x) = 0$ admet

exactement deux solutions

b) Vérifions que $-2,75 < \alpha < -2,74$

$f(-2,75) = 0,0028$; $f(-2,74) = -0,0058$ $0,25 \text{ pt}$

$f(-2,75)f(-2,74) < 0$ donc $-2,75 < \alpha < -2,74$

$$B / g(x) = e^{-\frac{x}{4}} \text{ et } I = [0; 1]$$

1) Montrons que β est solution unique : $x > 0, g(x) = x$

$$g(x) = x; \text{ on a } e^{-\frac{x}{4}} = x \Rightarrow -\frac{x}{4} = \ln x \text{ car } x > 0$$

$$\frac{x}{2} = -2 \ln x \Rightarrow e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{x^2}; \text{ on a } : x^2 e^{\frac{x}{2}} - 1 = 0 \quad 0,25 \text{ pt}$$

$2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$ pour $x > 0$; $f(x) = 0 \Rightarrow x = \beta$ $0,25 \text{ pt}$
donc β est solution unique de $g(x) = x$ pour $x > 0$

2) Montrons que $x \in I, g(x) \in I$

$$x \in I \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$-\frac{1}{4} \leq -\frac{x}{4} \leq 0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{4}} \leq e^{-\frac{x}{4}} \leq 1 \quad 0,25 \text{ pt}$$

$$e^{-\frac{1}{4}} \approx 0,77 \text{ donc } 0 \leq e^{-\frac{x}{4}} \leq e^{-\frac{1}{4}} \leq 1$$

d'où $\forall x \in I, g(x) \in I$ $0,25 \text{ pt}$

$$3) g(x) = e^{-\frac{x}{4}}$$

$$\forall x \in I, g'(x) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}; \quad \forall x \in I, g(0) \in I \text{ donc}$$

$$0 \leq g(x) \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq -\frac{1}{4}g(x) \leq 0 \text{ d'où}$$

$$\forall x \in I |g'(x)| \leq \frac{1}{4} \quad 0,25 \text{ pt}$$

$$4) (U_n) : \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$$

a) Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$

Supposons $n \in \mathbb{N}, U_n \in I$; d'après 2) $U_n \in I$

$\Rightarrow g(U_n) \in I$ or $g(U_n) = U_{n+1}$ donc $U_{n+1} \in I$ $0,25 \text{ pt}$

D'où (U_n) est une suite d'éléments de I

$$b) \forall x \in I, |g'(x)| \leq 1$$

D'après les LAF on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |g'(U_n) - g'(U_{n-1})| \leq \frac{1}{4} |U_n - U_{n-1}|$$

or $g(U_n) = U_{n+1}$ et $g(\beta) = \beta$ d'où

$$|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4} |U_n - \beta| \quad (0,25)^n; \text{ on a:}$$

$$|U_1 - \beta| \leq \frac{1}{4} |U_0 - \beta|$$

$$|U_2 - \beta| \leq \frac{1}{4} |U_1 - \beta|$$

$$|U_n - \beta| \leq \frac{1}{4} |U_{n-1} - \beta|$$

Après multiplication membre à membre et

$$\text{simplification on a: } |U_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |U_0 - \beta| \quad (0,25)^n$$

$$\text{or } \beta \in I \text{ et } U_0 \in I \text{ d'où } |U_0 - \beta| \leq 1 \quad (0,25)^n$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n |U_0 - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ et } \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$\text{d'où on a: } |U_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

c) Convergence de U_n

$$|U_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}; \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = 0 \text{ car } 0 < \frac{1}{2} < 1$$

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \beta$ donc (U_n) converge $(0,25)^n$

d) Détermination de n_0

Posons que U_n soit une approximation de β à 10^{-3}

$$\text{près, il suffit que } \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \leq 10^{-3} \quad (0,25)^n$$

$$2n(-\ln 2) \leq -\ln 10 \Rightarrow n \geq 4,98 \text{ d'où } n_0 = 5$$

e) Valeur de U_5

$$U_5 = g(U_4) = e^{-1,8159} = 0,17788$$

$$U_2 = g(U_1) = e^{-0,7788} = 0,8231$$

$$U_3 = g(U_2) = e^{-0,8231} = 0,8140$$

$$U_4 = g(U_3) = e^{-0,814} = 0,8159$$

$$U_5 = g(U_4) = e^{-0,8159} = 0,8155$$

C/1) Montrons que $(\Delta): y = -x - 3$ est asymptote à (C) en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x - 3)] \stackrel{x}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x}{2}} = 0 \text{ donc}$$

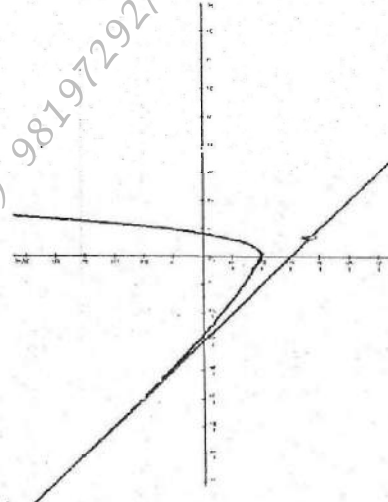
$(\Delta): y = -x - 3$ est asymptote oblique à (C) $(0,25)^n$

b) L'autre branche infinie

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2xe^{\frac{x}{2}} - \frac{2}{x} \right) = +\infty \quad (0,25)^n$$

(C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

2) Construction de (C) et (Δ)



3a) Calcul de I_0

$$I_0 = \int_0^\beta f(x) dx = \int_0^\beta \left(2xe^{\frac{x}{2}} - \frac{2}{x} \right) dx$$

$$= \int_0^\beta 2x^2 e^{\frac{x}{2}} dx - 2 \int_0^\beta \frac{1}{x} dx$$

$$\text{Posons } \begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = e^{\frac{x}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = 2e^{\frac{x}{2}} \end{cases}$$

$$I_0 = 2 \left[2x^2 e^{\frac{x}{2}} \right]_0^\beta - 8 \int_0^\beta x e^{\frac{x}{2}} dx - \left[x \right]_0^\beta$$

$$= 4\beta^2 e^{\frac{\beta}{2}} - 2\beta - 8 \int_0^\beta x e^{\frac{x}{2}} dx$$

$$\text{Posons } \begin{cases} k(x) = x \\ h'(x) = e^{\frac{x}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k'(x) = 1 \\ h(x) = 2e^{\frac{x}{2}} \end{cases}$$

$$I_0 = 4\beta^2 e^{\frac{\beta}{2}} - 2\beta - 8 \left[2x e^{\frac{x}{2}} \right]_0^\beta - 16 \int_0^\beta e^{\frac{x}{2}} dx$$

$$I_0 = 4\beta^2 e^{\frac{\beta}{2}} - 16\beta e^{\frac{\beta}{2}} + 32e^{\frac{\beta}{2}} - 2\beta - 32 \quad (0,25)^n$$

b) Aire $A(\alpha, \beta)$

$$A(\alpha, \beta) = - \int_\alpha^\beta f(x) dx \cdot \text{cm}^2 \quad (0,25)^n$$

$$= - \left(\int_\alpha^0 f(x) dx + \int_0^\beta f(x) dx \right) \quad (0,25)^n$$

$$= - \left(\int_\alpha^0 f(x) dx - \int_0^\beta f(x) dx \right) = \int_0^\alpha f(x) dx - I_\beta$$

$$\int_0^\alpha f(x) dx = \int_0^\alpha \left(-x + e^{\frac{x}{2}} - 3 \right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2} x^2 + 2e^{\frac{x}{2}} - 3x \right]_0^\alpha \quad (0,25)^n$$

$$= -\frac{1}{2} \alpha^2 + 2e^{\frac{\alpha}{2}} - 3\alpha + 2 \quad \text{on a:}$$

$$A(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2} \alpha^2 + 2e^{\frac{\alpha}{2}} - 3\alpha + 2 - I_\beta \quad (0,25)^n$$