

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	BACCALAUREAT 2014 MATHÉMATIQUES	DUREE : 4 H Coef. : 3
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE D	

SESSION NORMALE

Exercice 1 (4 points)

Soit l'équation (E) : $z^n = \frac{-9\sqrt{3} + 27i}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1- Déterminer les solutions z_k de (E).

(1 pt)

2- On pose $n = 5$

Représenter dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points-images des solutions z_k de (E).

(1pt)

3- On pose $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$.

a/ Soit $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, exprimer α en fonction de j .

(0,25 pt)

b/ Montrer que α est une solution de l'équation $z^5 = \frac{-9\sqrt{3} + 27i}{2}$.

(0,5 pt)

4- Soit la transformation T de P dans P , qui au point M de P d'affixe z associe le point M' de P

d'affixe z' tels que : $z' = (-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i)z + \frac{5+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$.

a/ Ecrire la forme algébrique du nombre complexe $w = (1-i)(2 + \sqrt{3} + 3i)$.

(0,25 pt)

b/ Donner la nature de T et préciser ses éléments caractéristiques.

(1 pt)

Exercice 2 (4 points)

Un secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel : les ingénieurs, les opérateurs de production et les agents de maintenance.

Il y a 8 % d'ingénieurs et 80 % d'opérateurs de production. Les femmes représentent 50 % des ingénieurs, 25 % des agents de maintenance et 60 % des opérateurs de production.

On interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise. On note:

- M l'événement : « Le personnel interrogé est un agent de maintenance »
- O l'événement : « Le personnel interrogé est un opérateur de production »
- I l'événement : « Le personnel interrogé est un ingénieur »
- F l'événement : « Le personnel interrogé est une femme »

1- Construire un arbre pondéré correspondant aux données.

(1 pt)

2- Calculer la probabilité d'interroger:

a/ Un agent de maintenance.

(0,5pt)

b/ Une femme agent de maintenance.

(0,5pt)

c/ Une femme.

(0,5pt)

3- Le service de maintenance effectue l'entretien de machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue ; des études ont montré que sur une journée :

- La probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,002.
- La probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à 0,003.
- La probabilité qu'une panne se produise est égale à 0,04.

On note :

- A l'événement : « l'alarme se déclenche »
- B l'événement : « une panne se produit »

a/ Démontrer que la probabilité qu'une panne se produise et l'alarme se déclenche est égale à 0,037.

(0,5 pt)

b/ Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.

(0,5 pt)

c/ Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

(0,5 pt)

Problème (12 points)

A/ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -x + e^{\frac{x}{2}} - 3 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = 2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1-a/ Etudier la continuité de f en 0.

(0,5 pt)

b/ Montrer que pour tout réel non nul u on a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x}{u}} - 1}{x} = \frac{1}{u}$.

(0,25 pt)

c/ Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)+2}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)+2}{x}$.

(0,5 pt)

Interpréter analytiquement et géométriquement les résultats obtenus.

(0,5 pt)

2- Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

(1,5 pts)

3-a/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β telles $\alpha < 0 < \beta < 1$.

(1 pt)

b/ Vérifier que $-2,75 < \alpha < -2,74$.

(0,25 pt)

B/ On pose $g(x) = e^{-\frac{x}{4}}$ et $I = [0; 1]$.

1- Montrer que β est l'unique solution de l'équation : $x > 0, g(x) = x$.

(0,5 pt)

2- Montrer que pour tout x appartenant à I , $g(x)$ appartient à I .

(0,5 pt)

3- Soit g' la fonction dérivée de g . Montrer que pour tout x de I on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

(0,25 pt)

4- On définit la suite (U_n) par : $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = g(U_n)$.

a/ Démontrer par récurrence que (U_n) est une suite d'éléments de I .

(0,5 pt)

b/ En appliquant les inégalités des accroissements finis, démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$\text{on a : } |U_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4} |U_n - \beta|, \text{ puis que } |U_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

(1 pt)

c/ En déduire que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.

(0,25 pt)

d/ Déterminer le plus petit entier naturel n_0 pour lequel U_{n_0} est une approximation de β à 10^{-3} près.

(0,25 pt)

e/ Calculer la valeur correspondante de U_{n_0} .

(0,5 pt)

C/

1-a/ Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x - 3$ est une asymptote à (C) en $-\infty$.

(0,25 pt)

b/ Etudier l'autre branche infinie de (C) .

(0,25 pt)

2- Construire avec soin (Δ) et (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$; (On prendra $\alpha \approx -2,7$ et $\beta \approx 0,8$).

(1,25 pts)

3-a/ Par des intégrations par parties, calculer $I_\beta = \int_0^\beta f(x) dx$.

(1 pt)

b/ Exprimer l'aire $A(\alpha, \beta)$ du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \beta$ en fonction de α et β seulement.

(1 pt)