

**Exercice 1 (4pts)**

ABCD et GCEF sont deux rectangles directs tels que :

$GC = 2AB$  et  $CE = 2BC$  et que les points B, C et G soient alignés.

- 1) a) Démontrez que les triangles ABC et GCE, ainsi que les triangles ABC et EFG, sont semblables. (2x 0,25pt)
  - b) Déduisez-en qu'il existe deux similitudes directes  $s$  et  $s'$  qui, au rectangle ABCD, associent le rectangle GCEF. (2x 0,25pt)
- Précisez pour chacune de ces similitudes, les images respectives des points A, B, C, D, l'angle et le rapport (On notera  $s$  la similitude d'angle  $\frac{\pi}{2}$ )
- 2) Soit  $\Omega$  le projeté orthogonal de C sur (GD).
    - a) Démontrez que  $\Omega$  est invariant par  $s$ . (0,5pt)
    - b) Déduisez-en qu'il existe une homothétie  $h$ , et une rotation  $r$ , toutes deux de centre  $\Omega$ , telles que :  $s = h \circ r = r \circ h$ . (0,5pt)

Le point  $\Omega$  est appelé centre de la similitude  $s$ .
  - 3) Déterminez de même le centre  $\Omega'$  de la similitude  $s'$  puis une homothétie  $h'$  et une rotation  $r'$ , toutes deux de centre  $\Omega'$ , telles que :  $s' = h' \circ r' = r' \circ h'$ . (0,5pt + 0,5pt)

**EXERCICE 2 (4pts)**

On considère les deux suites réelles  $(U_n)$  et  $(V_n)$  définies par :

$$U_1 = 2 \text{ et } V_1 = 7 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_{n+1} = \frac{2U_n + 3V_n}{5}, \quad V_{n+1} = \frac{U_n + 4V_n}{5}.$$

- 1) Calculez  $U_2$  et  $V_2$ . (0,5pt)
- 2) Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose  $W_n = V_n - U_n$ .
  - a) Démontrez que  $(W_n)$  est une suite géométrique. (0,25pt)
  - b) Exprimez  $W_n$  en fonction de  $n$ .  $(W_n)$  converge-t-elle? (0,5pt).
- 3) a) Démontrez que la suite  $(U_n)$  est croissante et que  $(V_n)$  est décroissante. (0,5pt + 0,25pt)
- b) Démontrez que la suite  $(U_n)$  est majorée et que  $(V_n)$  est minorée. (0,5pt + 0,25pt)
- 4) Soit  $(t_n)$  la suite de terme général  $t_n = \frac{1}{3}U_n + V_n$ , pour tout entier naturel non nul  $n$ .
  - a) Démontrez que  $(t_n)$  est une suite constante. (0,5pt)
  - b) Déduisez-en les limites des suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$ . (0,75pt)

**PROBLEME (12pts)**

$m$  étant un réel non nul, on considère la fonction :  $f_m: x \mapsto \frac{2mx^2-1}{mx-1}$  et  $(C_m)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

**Partie A**

- 1) Déterminez l'ensemble de définition  $D$  de  $f_m$  et calculez les limites de  $f_m$  aux bornes de  $D$  suivant les valeurs de  $m$ . (1,5pt)
- 2) Étudiez les variations de  $f_m$  suivant les valeurs de  $m$ . (1,5pt)

T.S.V.P.

- 3) a) Déterminez les réels  $a, b$  et  $c$  tels que  $f_m(x) = ax + b + \frac{c}{mx-1}$ . (0,5pt)  
 Déduisez-en que la droite  $(D_m)$  d'équation  $y = ax + b$  est asymptote à  $(C_m)$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ . (0,5pt)  
 Précisez l'équation de l'autre asymptote à  $(C_m)$ . (0,5pt)  
 b) Etudiez les positions relatives de  $(C_m)$  et de  $(D_m)$ . (0,5pt)  
 4) a) Démontrez que le point  $I_m\left(\frac{1}{m}; \frac{4}{m}\right)$  est un centre de symétrie de  $(C_m)$ . (0,5pt)  
 b) Déterminez l'ensemble des points  $(I_m)$  lorsque  $m$  décrit  $\mathbb{R}^*$ . (0,25pt)  
 5) Démontrez que  $\forall m \in \mathbb{R}^*, (C_m)$  passe par des points fixes dont vous préciserez les coordonnées. (0,5pt).

### Partie B

On s'intéresse au cas  $m = -\frac{1}{2}$  et on note  $g$  la fonction  $f_{-\frac{1}{2}}$ .

- 1) a) Précisez  $g(x)$ . (0,25pt)  
 b) Etablissez son tableau de variation. (2x 0,25pt)  
 c) Tracez  $C_g$  après avoir précisé ses asymptotes dans un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ . (1pt)  
 2) On considère l'équation  $(E): (k-2)x^2 + 2(k-2)x - 10 = 0, k \in \mathbb{R}$ .  
 a) Démontrez que  $(E)$  est équivalente à  $g(x) = kx - 4$ . (0,25pt)  
 b) Soit  $(\Delta k)$  la droite d'équation  $y = kx - 4$ , montrez que  $\forall k \in \mathbb{R}, (\Delta k)$  passe par un point fixe  $T$  dont vous préciserez les coordonnées. (0,25pt)  
 c) Déterminez l'équation de la tangente à  $(C_g)$  passant par  $T$ . (2x 0,5pt)  
 d) Déterminez suivant les valeurs de  $k$ , le nombre de solutions de  $(E)$ . (0,75pt)

### Partie C

On considère la fonction  $h$  définie par  $h(x) = \frac{x^2+1}{-\frac{1}{2}|x|+1}$ .

- 1) Déterminez l'ensemble de définition de  $h$ . (0,25pt)  
 2) Etudiez la parité de  $h$ . (0,25pt)  
 3) Déterminez le sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  sur lequel  $h$  et  $g$  coïncident. (0,25pt)  
 4) Construisez  $C_h$  dans le même repère que  $C_g$ , après que vous ayez expliqué la démarche. (1pt)