

Exercice - I

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + n - 1 \end{cases} \text{ et } V_n = 4U_n - 6n + 15$$

$$\begin{aligned} 1) a - V_{n+1} &= 4U_{n+1} - 6(n+1) + 15 \\ &= 4\left(\frac{1}{3}U_n + n - 1\right) - 6n - 6 + 15 \\ &= \frac{4}{3}U_n + 4n - 4 - 6n + 9 \\ &= \frac{4}{3}U_n - 2n + 5 \\ &= \frac{1}{3}(4U_n - 6n + 15) \end{aligned}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{3}V_n \quad (0,25)$$

$$V_n = 4U_n - 6n + 15$$

$$V_0 = 4U_0 + 15 = 4 + 15 = 19 \quad (0,25)$$

Concl $V_{n+1} = \frac{1}{3}V_n$ et $V_0 = 19$, d'où (V_n) est une suite géom. de 1^{er} terme $V_0 = 19$ et de raison $q = \frac{1}{3}$

$$b - V_n = V_0 q^n \text{ d'où } V_n = \frac{19}{3^n} \quad (0,25)$$

(avec sa raison et son V_0)

c - Dédution

$$V_n = 4U_n - 6n + 15$$

$$4U_n = V_n + 6n - 15$$

$$U_n = \frac{V_n}{4} + \frac{6n-15}{4} \text{ d'où } U_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4} \quad (0,5) \text{ (raisonnement)}$$

$$2) U_n = t_n + w_n$$

$$\text{Posons } t_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} \text{ et } w_n = \frac{6n-15}{4} \quad (0,25)$$

Vérifions que (t_n) est une suite géom.

$$t_{n+1} = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} \times \frac{1}{3}$$

$t_{n+1} = \frac{1}{3}t_n$ et $t_0 = \frac{19}{4}$ donc (t_n) est une suite géométrique de 1^{er} terme

$t_0 = \frac{19}{4}$ Rem t_n est de la forme bq^n et de raison $q = \frac{1}{3}$ $(0,5)$

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{6(n+1)-15}{4} = \frac{6n-15+6}{4} \\ &= \frac{6n-15}{4} + \frac{6}{4} \end{aligned}$$

$w_{n+1} = w_n + \frac{3}{2}$ et $w_0 = -\frac{15}{4}$ d'où (w_n) est une suite arithm. de 1^{er} terme

$w_0 = -\frac{15}{4}$ et de raison $\frac{3}{2}$ $(0,25)$

d'où $U_n = t_n + w_n$ où (t_n) est une

suite géom. et (w_n) arithm.

$$3) a) S_1 = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n$$

$$S_1 = t_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{19}{4} \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \right] \quad (0,25)$$

$$= \frac{19}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} \quad (0,25)$$

$$S_1 = \frac{57}{8} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right]$$

$$\begin{aligned} S_2 &= w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n \\ &= \frac{(n+1)(w_0 + w_n)}{2} \quad (0,25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{8}(n+1)(6n-30) = \frac{1}{4}(n+1)(3n-15) \\ &= \frac{3}{4}(n+1)(n-5) \quad (0,25) \end{aligned}$$

b) Dédution

$$S = U_0 + U_1 + \dots + U_n \text{ d'où}$$

$$S = (t_0 + w_0) + (t_1 + w_1) + \dots + (t_n + w_n) = S_1 + S_2 \text{ d'où}$$

$$S = \frac{57}{8} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right] + \frac{3}{4}(n+1)(n-5)$$

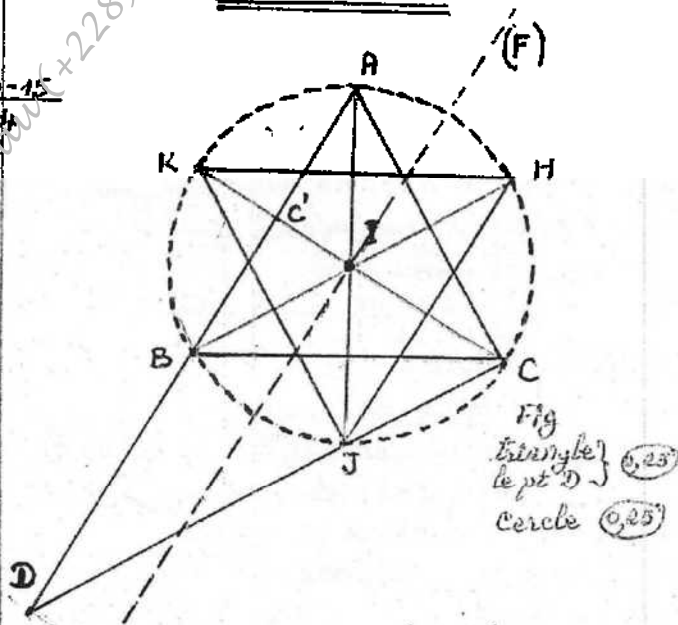
Exercice - II

Fig
triangle $\{ (0,25)$
le pt D $\{ (0,25)$
Cercle $\{ (0,25)$

1) Démon. q- ACD est rectangle

• 1^{re} méthode ABC équilatéral $\Rightarrow AB = AC = BC$

$$S_B(A) = D \Rightarrow AB = BD \quad (0,25)$$

ona : $BA = BC = BD$ et B mil $[AD]$ donc C appartient au cercle de diamètre $[AD]$ d'où ACD est un triangle rectangle en C . $(0,25)$

• 2^{de} méthode

$$\begin{aligned} \vec{CA} \cdot \vec{CD} &= \vec{CA} \cdot (\vec{CB} + \vec{BD}) = \vec{CA} \cdot (\vec{CB} - \vec{BA}) \quad (\text{car } \vec{BD} = -\vec{BA}) \\ \vec{CA} \cdot \vec{CD} &= \vec{CA} \cdot \vec{CB} - \vec{CA} \cdot \vec{BA} = \frac{1}{2}CA^2 - \frac{1}{2}CA^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \vec{CA} \perp \vec{CD} ; \text{ d'où } ACD \text{ est rectangle en } C. \end{aligned}$$

• 3^e méthode

$\text{mes } \widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \text{mes } \widehat{DBC} = 120^\circ$

le triangle BDC isocèle en $B \Rightarrow \text{mes } \widehat{BDC} = 30^\circ$
donc ACD rectangle en C .

• 4^e méthode

$Z = \text{mil } [AC]$

$B = \text{mil } [AD]$

$(BZ) \parallel (DC)$ ①, ABC étant équilatéral

$(BZ) \perp (AC)$ ② ; ① et ② $\Rightarrow (AC) \perp (DC)$

d'où ACD est rectangle en C .

b/ $\text{mes}(\widehat{BD}, \widehat{BC}) = \pi - \text{mes}(\widehat{BC}, \widehat{BA}) [2\pi]$
 $= \pi - \frac{\pi}{3} [2\pi]$
 $= 2\frac{\pi}{3} [2\pi]$

$\text{mes}(\widehat{BD}, \widehat{BC}) = 2\frac{\pi}{3} [2\pi] \quad (0,25)$

$\text{mes}(\widehat{CB}, \widehat{CD}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} [2\pi] \quad (0,25)$

$\text{mes}(\widehat{CB}, \widehat{CD}) = \frac{\pi}{6} [2\pi] \quad (0,25)$

2) $r(I, -\frac{\pi}{3})$

a) Constructⁿ du triangle HJK

$r(A, B, C) = (H, K, J) \quad (0,5)$

b) Nature de la figure $AHCJBK$

les triangles IAH, ICJ, IBK sont équilatéraux donc $AH = HC = CJ = JB = BK = KA$,
d'où la figure $AHCJBK$ est un hexagone régulier car inscriptible $(0,25)$

3) $f(M) = \vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}$

a) $= \vec{MA} + \vec{MA} + \vec{AB} - 2\vec{MA} - 2\vec{AC}$

$f(M) = \vec{AB} - 2\vec{AC} \quad (0,25)$

• Autre méthode

La s^e des coefficients est nulle
($1+1-2=0$) donc, $f(M)$ est indépendante de M . $(0,25)$

b/ $\vec{CE} = f(M)$, $C' = \text{mil } [AB]$

M. g. $\vec{CE} = 2\vec{CC'}$

$\vec{CE} = \vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}$
 $= \vec{MC'} + \vec{C'A} + \vec{MC'} + \vec{C'B} - 2\vec{MC'} - 2\vec{C'C} \quad (0,25)$

$= \vec{C'A} + \vec{C'B} - 2\vec{C'C} \quad (0,25)$

$= -2\vec{C'C}$

d'où $\vec{CE} = 2\vec{CC'}$

4) a/ M. g. $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 2MI \cdot CE$

On a: $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 - 2(\vec{MI} + \vec{IC})^2 \quad (0,25)$

$= MI^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IA} + IA^2 + MI^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IB} + IB^2 - 2MI^2 - 4\vec{MI} \cdot \vec{IC} - 2IC^2$

$= 2\vec{MI} \cdot (\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC}) + IA^2 + IB^2 - 2IC^2$

$= 2\vec{MI} \cdot \vec{I} \quad (0,25)$

$= 2\vec{MI} \cdot \vec{CE}$, d'où $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 2\vec{MI} \cdot \vec{CE}$

b/ $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 0 \Leftrightarrow 2\vec{MI} \cdot \vec{CE} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{MI} \cdot \vec{CE} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{MI} \perp \vec{CE}$

(F) est la droite perpendiculaire à (CE)

(ou (CC')) et passant par le pt I $(0,25)$

- Constructⁿ de (F) $(0,25)$

Problème

Partie-A. $g(x) = \frac{ax^2+bx+c}{2x+d}$

Déterminons les réels a, b, c et d .

-(C) coupe (Oy) au pt d'ordonnée 1

$$\Leftrightarrow g(0) = 1 \quad (0,25)$$

$$-A(-1) \in (C) \Leftrightarrow g(-1) = 1 \quad (0,25)$$

-Coeff. dir. de la tang. à (C) en A est 2

$$\Leftrightarrow g'(-1) = 2 \quad (0,25)$$

-la dte d'équat° $x = \frac{1}{2}$ est asympt. vert.

$$\text{à } (C) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} g(x) = +\infty \quad (0,25) \text{ ou } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} g(x) = -\infty$$

$$(1) \Leftrightarrow -\frac{d}{2} = -\frac{1}{2}, \text{ soit } d = 1 \quad (0,25)$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{c}{d} = 1 \text{ soit } c = d = 1; \underline{c = 1} \quad (0,25)$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{a(-1)^2 + b(-1) + 1}{2(-1) + 1} = 1$$

$$\Leftrightarrow a - b + 1 = -1, \text{ soit } a - b = -2 \quad (1)$$

$$g'(x) = \frac{(2ax+b)(2x+1) - 2(ax^2+bx+1)}{(2x+1)^2} \quad (0,25)$$

$$\text{Ainsi } (3) \Rightarrow (2a-b) - 2(a-b+1) = 2$$

$$\Rightarrow 2a - b - 2a + 2b - 2 = 2$$

$$\Rightarrow b = 4$$

$$b = 4 \text{ da } (1) \Rightarrow a = -2 \quad (0,25)$$

$$\text{Concl. } \boxed{a = -2; b = 4; c = 1; d = 1} \quad (0,25)$$

(justifier)

Partie-B $f(x) = \frac{2x^2+4x+1}{2x+1}$

$$1) D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x+1 \neq 0\} \quad (0,25)$$

$$\text{Posons } 2x+1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{d'où } D =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}; +\infty[\quad (0,25)$$

b) M.g. $f(x)$ se met sous la forme

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{2x+1}$$

$$\alpha x + \beta + \frac{\gamma}{2x+1} = \frac{(\alpha x + \beta)(2x+1) + \gamma}{2x+1}$$

$$= \frac{2\alpha x^2 + (2\alpha\beta + \gamma)x + \beta + \gamma}{2x+1}$$

Par identifiat° avec $f(x)$, on a :

$$\begin{cases} 2\alpha = 2 \\ 2\alpha\beta + \gamma = 4 \\ \beta + \gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \frac{3}{2} \\ \gamma = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{méth} \rightarrow (0,25) \\ \text{au "v. th"} \rightarrow (0,5) \\ \text{1 rep} \rightarrow (0,25) \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } f(x) = x + \frac{3}{2} + \frac{-1/2}{2x+1}$$

Rem: Autre méthode: div. eucl.

c) Asympt. obl.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + \frac{3}{2})] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{2(2x+1)} = 0 \quad (0,25)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + \frac{3}{2})] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2(2x+1)} = 0$$

$$\text{Ce } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x + \frac{3}{2})] = 0 \text{ alors la dte (D) d'équat° } y = x + \frac{3}{2} \text{ est}$$

asympt. obl. à (C). (0,25)

2) M.g. le pt B d'inters. des asympt. est centre de sym. à (C)

les asympt. à (C) sont: (Δ): $x = -\frac{1}{2}$ et (D): $y = x + \frac{3}{2}$

$$(2) \cap (\Delta) \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = x + \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{d'où } B(-\frac{1}{2}; 1) \quad (0,25)$$

$$\forall x \in D \text{ on a: } x \neq -\frac{1}{2}$$

$$-x \neq \frac{1}{2}$$

$$1-x \neq -\frac{1}{2}$$

$$\text{soit } 1-x \in D \quad (0,25)$$

$$f(-1-x) + f(x) = -1-x + \frac{3}{2} + \frac{-1/2}{2(-1-x)+1}$$

$$+ x + \frac{3}{2} + \frac{-1/2}{2x+1}$$

$$= 2 + \frac{-1/2}{-2x-1} + \frac{-1/2}{2x+1}$$

$$f(-1-x) + f(x) = 2 \quad (0,25)$$

Puisque $\forall x \in D, -1-x \in D$ et $f(-1-x) + f(x) = 2$ alors le pt $B(-\frac{1}{2}; 1)$ est c.s. à (C).

2° méthode

$$\text{Soit } h(x) = f(x - \frac{1}{2}) - 1. \text{ M.g. } h \text{ est impair}$$

Poser $h(x)$ (0,25)

3° méthode

$$\text{M.g. } f(-\frac{1}{2}+x) + f(-\frac{1}{2}-x) = 2 \quad (0,25)$$

3) Etude des variat° de f

$$D =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad (0,25)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	$-\infty$	0	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty, \text{ car } \begin{cases} 2x^2+4x+1 \rightarrow -1/2 \\ 2x+1 \rightarrow 0^- \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty, \text{ car } \begin{cases} 2x^2+4x+1 \rightarrow -1/2 \\ 2x+1 \rightarrow 0^+ \end{cases}$$

(justif)

• f est dérivable sur D et on a:

$$\forall x \in D, f'(x) = \frac{(4x+4)(2x+1) - 2(2x^2+4x+1)}{(2x+1)^2} \quad (0,25)$$

$$= \frac{8x^2+4x+8x+4-4x^2-8x-2}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{4x^2+4x+2}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{(2x+1)^2+1}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(2x+1)^2}$$

1 en 2^e des
discussions
avec signe
est
le nb de sol
sans signe

Autre méthode

$$f'(x) = 1 - \frac{(-\frac{1}{2}) \times 2}{(2x+1)^2}$$

$$= 1 + \frac{1}{(2x+1)^2}$$

$\forall x \in D, (2x+1)^2 > 0$ donc $\frac{1}{(2x+1)^2} + 1 > 0$

Soit $f'(x) > 0$ (0,25)

$\forall x \in D, f'(x) > 0$ d'où f est strict. $\uparrow$
sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$ et sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ (0,25)

T. Y.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

4) Courbe

(Net flèches)

(E): (0,75)

(A): (0,25)

(D): (0,25)

I, J, L

pr. à pts au

(E'): (0,5)

NA le candidat trace
(E') correspondante à
sa courbe fautive (E)
 $\rightarrow$ (1)

4) Courbe (E) $\cap$ (0, $\vec{i}$); $f(x) = 0$ on a: $2x^2+4x+1=0$

$$\Delta = 4-2=2; x_1 = \frac{-2-\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{-2+\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{d'où } (E) \cap (0, \vec{i}) = \{I(-\frac{2-\sqrt{2}}{2}, 0); K(-\frac{2+\sqrt{2}}{2}, 0)\}$$

$$(E) \cap (0, \vec{i}) = \{L(0)\}$$

5) Nb et signe des solut^s de l'équatⁿ

$$2x^2+(4-2m)x+1-m=0 \quad (E)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+4x+1=2mx+m$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+4x+1=m(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+4x+1}{2x+1} = m, \forall x \neq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) = m \quad \forall x \in D$$

Ainsi graphiquement on obtient:

Pr $m \in]-\infty; -1[$, (E) admet 2 sol. négatives

Pr $m = -1$, (E) admet 2 sol dont l'un est nulle et l'autre négative (0,25)

Pr $m \in]-1; +\infty[$, (E) admet 2 sol. de signes opposés.

6) Justificatⁿ

L'équatⁿ: $x \in]-\frac{1}{2}; +\infty[$, $f(x) = m$ admet

graphiq^{ue} 1 solut^s $\forall m \in \mathbb{R}$ (0,25)

Ainsi la restrictⁿ de f à $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ est biject^{ive}
de $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$

$$* h(x) = \frac{2x^2+4x+1}{2x+1}$$

obtient de (E') à partir de (E)

$$\text{Rmq que } h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in]-\frac{1}{2}; +\infty[\\ -f(x), & \text{si } x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\end{cases} \quad (0,25)$$

$$\text{Ainsi } (E') = (E)_{x > -\frac{1}{2}} \cup S_{(0)}(E)_{x < -\frac{1}{2}}$$

$$(E)_{x \in]-\frac{1}{2}; +\infty[} \cup S_{(0)}(E)_{x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[}$$

Partie - C

$$g_m(x) = (m-1)x^2 + (2-3m)x + 2m-3 \quad (m \in \mathbb{R})$$

1) Nb de courbes (P) passant par A(-1; 1)

$$A \in (P_m) \Leftrightarrow 1 = (m-1)(-1)^2 + (2-3m)(-1) + 2m-3$$

$$\Leftrightarrow m-1-2+3m+2m-3=1 \Leftrightarrow 6m=7 \Leftrightarrow m=\frac{7}{6}$$

Ainsi seule la courbe (P_{7/6}) passe par A(-1; 1)

2) Points fixes

$$\text{Posons } g_m(x) = y; \text{ on a: } mx^2 - x^2 + 2x - 3mx + 2m - 3$$

Cette équatⁿ admet 2 sol. $\forall m$ ss $m(x^2-3x+2)=0$

$$x^2-3x+2=0 \quad \Leftrightarrow \Delta=1; x_1=\frac{3-1}{2}=1; x_2=\frac{3+1}{2}=2$$

$$y+x^2-2x+3=0 \quad \Leftrightarrow x_1=1 \text{ d'où } y=-1^2+2 \times 1-3=-2$$

$$x_2=2 \quad \Rightarrow y=-2^2+2 \times 2-3=-3$$

d'où ites les c. (P_m) passent par H₁(-1) et H₂(-3)

3) a) Pr $m \neq 1$, $S_m(-\frac{b}{2a}) = \frac{4ac-b^2}{4a}$ (0,25)

$$S_m\left(\frac{3m-2}{2(m-1)}; \frac{-(2-3m)^2-4(m-1)(2m-3)}{4(m-1)}\right)$$

$$S_m\left(\frac{3m-2}{2(m-1)}; \frac{-m^2-8m+8}{4(m-1)}\right) \quad (0,25)$$

b) Cons. décrit par S_m. Posons $x = \frac{3m-2}{2(m-1)}$; $y = \frac{-m^2-8m+8}{4(m-1)}$

$$\text{on a: } 2mx-2x=3m-2 \Rightarrow m = \frac{2x-2}{2x-3} \text{ avec } x \neq \frac{3}{2}$$

$$m \text{ d'où } y = -\frac{1}{4}m - \frac{9}{4} - \frac{1}{4(m-1)} \text{ on a}$$

$$y = -\frac{1}{4}\left(\frac{2x-2}{2x-3}\right) - \frac{9}{4} - \frac{1}{4\left(\frac{2x-2}{2x-3}-1\right)}$$

$$S_m: y = \frac{-x^2-2x+5}{2x-3}$$