

**Exercice1** (3,5pts)

On considère les suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  définies par :  $\forall n \in \mathbb{N}, U_0 = 1, U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + n - 1$  et  $V_n = 4U_n - 6n + 15$ .

- 1) a) Démontrez que  $(V_n)$  est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. (0,5pt)
- b) Exprimez  $V_n$  en fonction de  $n$ . (0,25pt)
- c) Déduisez-en que pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$ . (0,5pt)
- 2) Démontrez que la suite  $(U_n)$  peut s'écrire sous la forme d'une somme d'une suite géométrique  $(t_n)$  et d'une suite arithmétique  $(W_n)$ . (1pt)
- 3) a) Calculez  $S_1 = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n$  et  $S_2 = W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_n$ . (0,5ptx2)
- c) Déduisez-en  $S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$ . (0,25pt)

**Exercice2** (4,5pts)

Soit  $ABC$  un triangle équilatéral de sens direct,  $I$  le centre du cercle circonscrit à ce triangle ;  $D$  le symétrique de  $A$  par rapport à  $B$ .

- 1) a) Démontrez que le triangle  $ACD$  est rectangle. (0,5pt)
- b) Déterminez les mesures des angles  $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC})$  et  $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$ . Justifiez les résultats. (1pt)
- 2) On désigne par  $(H, K, J)$  l'image de  $(A, B, C)$  par la rotation d'angle  $(-\frac{\pi}{3})$  et de centre  $I$ .
  - a) Construisez le triangle  $HJK$ . (0,5pt)
  - b) Quelle est la nature de la figure  $AHCJBK$  ? (0,25pt)
- 3) a) Démontrez que  $f(M) = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$  est un vecteur indépendant du point  $M$  du plan. (0,25pt)
- b) Soit  $E$  un point du plan tel que  $\overrightarrow{CE} = f(M)$  et  $C'$  le milieu  $[AB]$ . Montrez que  $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CC'}$ . (0,5pt)
- 4) Soit  $(F)$  l'ensemble des points  $M$  du plan tel que :  $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 0$ .
  - a) Montrez que pour tout point  $M$  du plan on a :  $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{CE}$ . (0,5pt)
  - b) Déduisez-en et construisez l'ensemble  $(F)$ . (0,25ptx2) (Figure : 0,5pt)

**Problème** (12pts)**Partie A**

Soit  $g$  la fonction numérique à variable réelle définie par  $g(x) = \frac{ax^2+bx+c}{2x+d}$  et  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Déterminez les réels  $a, b, c$  et  $d$  sachant que :

- $(C)$  coupe l'axe  $(Oy)$  au point d'ordonnée 1.
- $(C)$  passe par le point  $A(-1; 1)$  et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 2.
- la droite d'équation  $x = -\frac{1}{2}$  est une asymptote verticale à  $(C)$  (2pts)

**Partie B**

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{2x^2+4x+1}{2x+1}$ .

- 1) a) Déterminez l'ensemble de définition  $D$  de  $f$ . (0,5pt)
- b) Montrez que pour tout  $x$  appartenant à  $D$ ,  $f(x)$  peut se mettre sous la forme  $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{2x+1}$ ,  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont des réels à déterminer. (0,75pt)
- c) Déduisez-en que la courbe  $(C)$  admet une asymptote oblique  $(D)$  et donnez son équation. (0,5pt)
- 2) Montrez que le point  $B$  intersection des asymptotes est un centre de symétrie pour la courbe  $(C)$ . (0,75pt)
- 3) Étudiez les variations de  $f$  et dressez son tableau de variation. (1,5pt)
- 4) Tracez  $(C)$  et  $(D)$ . (1,25pt)

- 5) Utilisez le graphique pour discuter du nombre et du signe des solutions de l'équation  $2x^2 + (4 - 2m)x + 1 - m = 0$  suivant les valeurs du paramètre réel  $m$ . (0,5pt)
- 6) Utilisez encore le graphique pour justifier que la restriction de  $f$  sur  $]-\frac{1}{2}; +\infty[$  est une bijection. (0,5pt)

Soit  $h$  la fonction définie par  $h(x) = \frac{2x^2 + 4x + 1}{|2x + 1|}$ . Expliquez comment obtenir la courbe  $(C')$  de  $h$  à partir de  $(C)$  de  $f$ ? Construire  $(C')$  dans le même repère que  $(C)$ . (1pt)

### Partie C

On considère la fonction  $g_m$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $g_m(x) = (m - 1)x^2 + (2 - 3m)x + 2m - 3$ ,  $m \in \mathbb{R}$ . On désigne par  $(P_m)$  sa représentation graphique dans le plan muni du repère  $(O, I, J)$ .

- 1) Déterminez le nombre de courbe qui passe par le point  $A(-1; 1)$ . (0,5pt)
- 2) Démontrez que toutes les courbes  $(P_m)$  passent par deux points dont les coordonnées sont indépendantes de  $m$ . (0,75pt)
- 3) a) Pour  $m \neq +1$  calculez les coordonnées du sommet  $S_m$  de  $(P_m)$ . (0,5pt)
- 4) b) Quel est l'ensemble décrit par  $S_m$  lorsque  $m$  décrit  $\mathbb{R} - \{+1\}$ . (1pt)

Pour les répétitions, contacter CJEDP au (+228) 981229212 ou 981229212 www.cjedp.noble.in