

Exercice 1 (5pts)

Soit l'expression : $A(x) = \frac{2\sin 4x}{2\cos^2 x - 1}$ avec x élément de $\mathbb{R}$.

- 1) Trouvez l'ensemble D des réels pour lesquels $A(x)$ existe. (1pt)
- 2) Montrez que pour tout réel x de D , on a $A(x) = 4\sin 2x$. (0,5pt)
- 3) Soit l'équation $\frac{2\sin 4x}{2\cos^2 x - 1} = m$ où m désigne un paramètre réel.
 - a) Pour quelle valeur de m cette équation admet-elle des solutions ? (0,5pt)
 - b) Résolvez l'équation proposée pour $m = 2\sqrt{3}$ et placez les points images des solutions sur un cercle trigonométrique. (1,5pt)
 - c) Montrez que, pour $\cos x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ avec $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\sin x = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ et $m = 2$. (1pt)
 - d) Résolvez alors l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ avec $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$. (0,5pt)

Exercice 2 (4pts)

ABC est un triangle équilatéral de côté 2 (unité en cm). On appelle $\mathcal{T}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$.

- 1) M étant un point quelconque du plan, construisez M' l'image de M par $ho\mathcal{T}$. (0,5pt)
- 2) a) Démontrez que $\overrightarrow{AM'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$. (0,75pt)
- b) Déduisez-en que $ho\mathcal{T}$ admet un point invariant Ω tel que $\overrightarrow{A\Omega} = -3\overrightarrow{AB}$ puis placez Ω . (0,5pt)
- c) Déduisez-en que $\overrightarrow{\Omega M'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\Omega M}$ puis caractérisez $ho\mathcal{T}$. (0,5pt)
- 3) Soit Γ l'ensemble des points M du plan vérifiant $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$.
 - a) Vérifiez que les points A et H appartiennent à Γ , H étant le pied de la hauteur issue de A . (0,5pt)
 - b) Déterminez puis construisez Γ . (0,75pt)
 - c) Déterminez puis construisez Γ' l'ensemble que décrit M' , (M' étant défini en 1)) lorsque M décrit Γ . (0,5pt)

Problème (11pts)

I/ Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^3}{x^2 - 1},$$

de représentation graphique (C_f) dans le plan muni repère orthonormé (O, I, J) .

- 1) a) Déterminez l'ensemble de définition Df def. (0,5pt)
- b) Etudiez le sens de variation de f puis dressez son tableau de variation. (2,75pt)
- 2) a) Démontrez qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que : pour tout x élément de Df ; $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2-1}$. (1pt)
- b) Déduisez-en que (C_f) admet une asymptote oblique (D) dont vous préciserez une équation. (0,5pt)
- c) Donnez les équations des autres asymptotes de (C_f) . (0,5pt)
- 3) Tracez (C_f) et ses asymptotes dans le plan. (1,25pt)

II/ Soit (Em) l'équation : $x \in \mathbb{R}, x^3 = mx^2 - m$

Discutez graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation (Em) . (1pt)

III/ soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{(|x|)^3}{x^2-1}$$

$$x \mapsto \frac{x^3-5x^2+7x-1}{(x-1)^2-1}$$

Soient (C_g) et (C_h) les représentations graphiques respectives des fonctions g et h .

- 1) a) Etudiez la parité de g . (0,5pt)
b) Précisez l'ensemble sur lequel f et g coïncident. (0,25pt)
- 2) Déduisez la représentation graphique (C_g) de g à partir de (C_f) . (On expliquera la construction et on utilisera une couleur différente pour représenter (C_g) . (0,75pt)
- 3) a) Montrez qu'il existe deux réels e et p tels que $h(x) = f(x - p) + e$. (1pt)
b) Déduisez-en que (C_h) se déduit de (C_f) par une transformation du plan que l'on précisera. (0,5pt)
c) Représentez graphiquement (C_h) dans un même repère que (C_f) et (C_g) . (0,5pt)