

**Exercice I** (6 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  (unité graphique : 1 cm). Soient les nombres complexes  $a = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i \left( \frac{\sqrt{3}-1}{4} \right)$  et  $z_0 = 6+6i$  d'image  $A_0$ .

Pour tout  $n$  entier naturel non nul, on désigne par  $A_n$  le point d'affixe  $z_n$  définie par  $z_n = a^n z_0$ .  
A/

- 1) Exprimer  $z_1$  et  $a^2$  sous forme algébrique. (0,5 pt x 2)
- 2) Exprimer  $z_3$  puis  $z_7$  en fonction de  $z_1$  et  $a$ ; En déduire l'expression de  $z_3$  et  $z_7$  sous forme exponentielle. (1 pt)
- 3) Placer les points  $A_0, A_1, A_3$  et  $A_7$  images respectives des complexes  $z_0, z_1, z_3$  et  $z_7$ . (0,5 pt)

B/ On pose pour tout entier naturel  $n, |z_n| = r_n$ .

- 1) Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $r_n = 12 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n+1}$ . (1 pt)
- 2) Déduire que la suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. (1 pt)
- 3) Déterminer la limite de la suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et interpréter géométriquement le résultat obtenu. (0,5 pt)
- 4) Déterminer le plus petit entier naturel  $p$  tel que  $OA_p \leq 10^{-3}$  et donner une mesure de l'angle orienté  $(\vec{u}, \overrightarrow{OA_p})$ . (1 pt)

**Exercice II** (4 pts)

On pose  $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$ ;  $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx$  et  $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx$

- 1)  $f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \ln \left( x + \sqrt{x^2+2} \right)$ 
  - a) Calculer  $f'(x)$ . (0,5 pt)
  - b) Déduire la valeur exacte de  $I$ .
- 2) a) Vérifier que  $J + 2I = K$ . (1 pt)
  - b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur  $K$ , montrer que  $K = \sqrt{3} - J$ . (1,5 pt)
  - c) En déduire les valeurs de  $J$  et de  $K$ . (1 pt)

**Problème** : (10 pts)

$f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x + 1 + x e^{-x}$ . On note  $(C_f)$  la courbe de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On pose  $g(x) = 1 + (1-x) e^{-x}$

- 1) Etudier les variations de  $g$  et déduire le signe de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}$ . (1 pt)
- 2) Montrer que  $f'(x) = g(x)$  puis étudier les variations de  $f$ . (1 pt)
- 3) a) Montrer que la droite  $(\mathcal{D}) : y = x + 1$  est asymptote oblique pour  $(C_f)$ , puis étudier la position relative de  $(C_f)$  et de  $(\mathcal{D})$ . (0,75 pt)
  - b) La courbe  $(C_f)$  admet en un point  $A$  une tangente parallèle à la courbe  $(\mathcal{D})$ . Déterminer les coordonnées du point  $A$ . (0,5 pt)

- 4) Démontrer que l'équation  $f(x) = 2$  admet sur  $\mathbb{R}$  une unique solution notée  $\alpha$  tel que  $0 < \alpha < 1$ . (0,5 pt)
- 5) a) Construire la droite  $(\mathcal{D})$ , placer le point A puis construire la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  et la tangente en A à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ . (1 pt)
- b) Donner par lecture graphique une valeur approchée de  $\alpha$ . (0,25 pt)
- B) 1) Démontrer que sur  $\mathbb{R}$ , l'équation  $f(x) = 2$  équivaut à l'équation  $\frac{e^x}{e^x + 1} = x$ . (0,5 pt)
- 2) a- On appelle  $h$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; 1]$  par  $h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ .  
Etudier les variations de  $h$  sur  $[0; 1]$ . (0,5 pt)
- b- En déduire que  $\forall x \in [0; 1], h(x) \in [0; 1]$ . (0,25 pt)
- c- Étudier les variations de  $h'$  sur  $[0; 1]$ . (0,75 pt)
- d- En déduire que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$ ,  $0 \leq h(x) \leq \frac{1}{4}$ . (0,5 pt)
- 3) On définit la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .
- a) Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [0; 1]$ . (0,5 pt)
- b) Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |U_n - \alpha|$ . (0,5 pt)
- c) Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ . (0,5 pt)
- d) Montrer que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\alpha$ . (0,5 pt)
- e) Déterminer un entier  $p$  tel que  $U_p$  soit une valeur approchée à  $10^{-4}$  près de  $\alpha$ . (0,5 pt)

**Bonne composition**

Pour les répétitions, contacter CJEDP au 02 28 98 19 72 92 / 92 10 43 12 [www.cjedp.mobie.in](http://www.cjedp.mobie.in)