

LYCÉE DE HÉDZRANAWOÉ	Composition du 1 ^{er} semestre Epreuve de Mathématiques	Année scolaire : 2013-2014
BP : 30280 LOMÉ		Classe : 1 ^{ère} D
Tel : 22 26 00 00		Durée : 4h

Exercice 1 (7,5 points)

- A) Calculer $(1 + \sqrt{3})^2$, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4(\cos^2 x - 1) - 2(\sqrt{3} - 1)\sin x + \sqrt{3} = 0$. (1 pt)
- B) 1) a) Calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$. (0,75 pt)
(On pourra utiliser la relation $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$.)
b) Montrer : $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. (0,25 pt)
c) Montrer : $\sin x + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$. (0,5 pt)
d) Montrer : $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin x = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \iff \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. (0,5 pt)
- 2) Résoudre alors dans $\mathbb{R}^2$, le système $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6} \\ \sin x + \cos y = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \end{cases}$. (1 pt)
- C) Dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère $(\Gamma) = \{M(x; y) \in \mathcal{P} / x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8 = 0\}$.
- Caractériser (Γ) , puis donner une représentation paramétrique de (Γ) . (1,25 pts)
 - a) Vérifier que le point $C(-2; 2)$ appartient à (Γ) . (0,5 pt)
b) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à (Γ) en $C(-2; 2)$. (0,75 pt)
 - Construire (I') et (T) . (1 pt)

Exercice 2 (4,5 points)

- A) f et g sont des fonctions respectivement définies par $f(x) = \sqrt{|x+3|-2}$ et $g(x) = \frac{1}{4-x^2}$.
Déterminer l'ensemble de définition de $g \circ f$, puis son expression. (1 pt)
- B) On considère la fonction numérique f d'une variable réelle, définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.
- Déterminer l'ensemble de définition de f . (0,5 pt)
 - La fonction est-elle injective? surjective? (1 pt)
(On justifiera les réponses données.)
 - Montrer que l'image de f est $[-1; 1]$. (0,5 pt)
 - On appelle g la restriction de f à $[-1; 1]$.
Montrer que g est bijective, puis déterminer g^{-1} . (1,5 pts)

Exercice 3 (8 points)

Soit ABC un triangle tel que $AB = AC = 3$ et $BC = 4$. On désigne par I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$.

- On considère le système de points pondérés $\{(A, \alpha), (B, \alpha+1), (C, 1)\}$, où α est un paramètre réel.
 - Pour quelles valeurs de α , ce système admet-il un barycentre G_α ? (0,5 pt)
 - Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, montrer : $\overrightarrow{IG}_\alpha = \frac{1}{\alpha+1} \overrightarrow{IJ}$. (0,5 pt)
 - Déduire alors l'ensemble (E_α) des G_α , lorsque α décrit $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. (0,25 pt)
- Pour la suite, on prend $\alpha = 2$ et on pose $G = \text{bar}\{(A, 2), (B, 3), (C, 1)\}$.
 - Exprimer $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{CG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. ($3 \times 0,75$ pts)
 - Déterminer alors les valeurs de AG^2 , BG^2 et CG^2 . ($3 \times 0,75$ pts)
 - Déterminer et construire l'ensemble $(E) = \{M \in \mathcal{P} / 2MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 74\}$. (1,25 pts)
- Soient K, L et N des points tels que : $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$.
Démontrer que les droites (CK) , (AL) et (BN) sont concourantes au point G . (1 pt)