

LYCÉE DE HEDZANAWOÉ	Devoir de maison de Mathématiques distribué le jeudi 25 avril 2013	Année scolaire : 2012-2013
BP : 30280 LOMÉ		Classe : 2 ^{nde} S
Tel : 22 26 00 00		A rendre le 30-04-2013

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la fonction polynôme f_a définie par $f_a(x) = -x^4 + (3+a)x^3 - (5+3a)x^2 + (6+5a)x - 6a$.

- Déterminer a pour que le réel 1 soit un zéro de f_a .
(On notera a_0 la valeur de a trouvée).
- On appelle g la fonction définie par $g(x) = f_{a_0}(x)$.
 - Calculer $g(2)$.
 - Déterminer alors la forme factorisée de g .
 - Etudier, suivant les valeurs de x , le signe de $g(x)$.
- On nomme h la fonction rationnelle définie par $h(x) = \frac{g(x)}{(x-1)(x^2+x-6)}$.
 - Déterminer l'ensemble de définition D de h .
 - Etudier, suivant les valeurs de x , le signe de $P(x) = (x-1)(x^2+x-6)$.
 - En déduire le signe de $h(x)$, suivant les valeurs de x .
- Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $h(x) = ax + b + \frac{c}{x+3}$.

Exercice 2

On considère un demi-cercle de centre O et de diamètre $BC = 2$.

On désigne par A un point de ce demi-cercle tel que $\widehat{COA}$ soit aigu et par α la mesure principale de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

On note H le projeté orthogonal de A sur (BC) et I celui de O sur (AB) .

- Faire une figure illustrant la situation.
- Démontrer que I est le milieu de $[AB]$ et que $OH = \cos 2\alpha$.
- Exprimer AB en fonction de $\cos \alpha$.
- Démontrer $BH = 2\cos^2 \alpha$ et $OH = 2\cos^2 \alpha - 1$.
- En déduire $\cos^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$ et $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$.
- Application.
 - Calculer $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.
 - Calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 3

On considère l'application $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ telle que $\begin{cases} x' = -\frac{2}{3}x + 1 \\ y' = -\frac{2}{3}y - 3 \end{cases}$
 $M(x, y) \mapsto M'(x', y')$

- Déterminer les coordonnées du point I tel que $f(I) = I$.
Que représente I pour f ?
- Exprimer $\overline{IM'}$ en fonction de $\overline{IM}$ puis déterminer la nature de f .
- Soient $A(-1, 1)$ et $B(3, 3)$ deux points du plan.
 - Déterminer l'équation canonique du cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$.
 - Déduire l'équation canonique de l'image $(\mathcal{C}')$ de $(\mathcal{C})$ par f .
 - Représenter $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 - On désigne par $(\mathcal{D})$ la droite passant par A et B .
Déterminer une équation cartésienne de $(\mathcal{D})$.
 - En déduire une équation cartésienne de $(\mathcal{D}')$, image de $(\mathcal{D})$ par f , puis construire $(\mathcal{D}')$.
- Soient M un point variable du cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$ et J le milieu de $[AM]$.
Déterminer et construire le lieu du point J lorsque M décrit $(\mathcal{C})$.