

LYCEE DE HEDZRANAWOE	Devoirs Surveillés du 1 ^{er} semestre Epreuve de Mathématiques	Année scolaire : 2013-2014
BP : 30280 LOMÉ		Classe : 1 ^{ère} D
Tel : 22 26 00 00		Durée : 3h

Exercice 1 (7,5 points)

- A) On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $(E): 2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$.
- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $(E_0): 2x^2 + x - 10 = 0$. (0,5 pt)
 - 2) Montrer que, pour $x \neq 0$, (E) est équivalente à $(E'): 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 10 = 0$. (0,5 pt)
 - 3) Dédire alors la résolution de (E) . (1 pt)
- B) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, chacun des systèmes suivants : (3 × 1 pts)
- 1) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \sqrt{3} \\ xy = 2 \end{cases}$
 - 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 164 \\ x - y = 2 \end{cases}$
 - 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 52 \\ x + y = 8 \end{cases}$.
- C) Résoudre, par la méthode du pivot de GAUSS, le système $(\Sigma): \begin{cases} -3x + y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + 8z = 16 \\ x - 2y + 5z = 10 \end{cases}$. (1 pt)
- D) 1) Résoudre graphiquement, dans $\mathbb{R}^2$, le système $(S): \begin{cases} 4x - 5y + 6 > 0 \\ 5x + y - 7 < 0 \\ x + 6y + 16 > 0 \end{cases}$. (1 pt)
- 2) Dédire l'ensemble solution du système (S) dans $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}$. (0,5 pt)

Exercice 2 (4,5 points)

On considère l'équation $(E_\alpha): x^2 - (2\alpha - 1)x + \alpha^2 + 5 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

- 1) Déterminer les valeurs de α pour que :
 - a) (E_α) admette deux solutions distinctes. (1 pt)
 - b) (E_α) admette une solution double. (0,5 pt)
 - c) (E_α) n'admette pas de solutions. (0,5 pt)
- 2) On suppose que (E_α) admet deux solutions (non nécessairement distinctes) x_1 et x_2 .
 - a) Déterminer une relation entre x_1 et x_2 indépendante de α . (1 pt)
 - b) Dédire de cette relation, la solution double de (E_α) . (0,5 pt)
 - c) Déterminer α pour que x_1 et x_2 soient de même signe. (0,75 pt)
 - d) Déterminer, si possible, α pour que x_1 et x_2 soient de signes contraires. (0,25 pt)

Exercice 3 (8 points)

Soit ABC un triangle équilatéral de côté $a \in \mathbb{R}_+^*$, et on désigne par I le milieu de $[BC]$.

- 1) On considère le système de points pondérés $\{(A, m), (B, 1), (C, 1)\}$, où m est un paramètre réel.
 - a) Pour quelles valeurs de m , ce système admet-il un barycentre G_m ? (0,5 pt)
 - b) Déterminer l'ensemble (E_m) des G_m , lorsque m décrit $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. (0,5 pt)
- 2) Pour la suite, on prend $m = 2$ et on pose $G = G_2$.
 - a) Exprimer alors AG^2, BG^2 et CG^2 en fonction de a . (3 × 0,75 pts)
 - b) On appelle φ , l'application $M \mapsto 2MA^2 + MB^2 + MC^2$.
Exprimer $\varphi(M)$ en fonction de MG^2 et a^2 . (0,75 pt)
 - c) Déterminer l'ensemble $(I) = \{M \in \mathcal{P} / \varphi(M) = 2a^2\}$. (0,75 pt)
- 3)
 - a) Vérifier que le point A appartient à (I) . (0,5 pt)
 - b) Construire alors l'ensemble (I) . (0,75 pt)
- 4) On pose $(\Delta) = \{M \in \mathcal{P} / -2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 0\}$.
 - a) Montrer : $(\Delta) = \left\{M \in \mathcal{P} / MA^2 - MI^2 = \frac{a^2}{4}\right\}$. (0,75 pt)
 - b) Déterminer la nature de (Δ) . (0,75 pt)
 - c) Représenter alors (Δ) sur la figure précédente. (0,5 pt)