



Classe 1^{ere}

Durée : 4H

Epreuve de Mathématique

Exercice 1 (4 pts)

Soient les suites (a_n) et (b_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $a_0 = 1$, $b_0 = 8$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}$.

1. Calculer a_1 et b_1 .
2. Soit la suite (d_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $d_n = a_n + b_n$.
 - a. Démontrer que (d_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme d_0 et la raison q .
 - b. Exprimer d_n en fonction de n .
 - c. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n > 0$.
 - d. Démontrer que (d_n) converge vers 0.
 - e. On note $T_n = d_0 + d_1 + \dots + d_{n-1}$. Calculer T_n en fonction de n .
3.
 - a. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n-1} - a_n = \frac{d_n}{3}$ et $b_{n-1} - b_n = \frac{d_n}{4}$.
 - b. En déduire les variations de (a_n) et (b_n) .

Exercice 2 (4 pts)

Soient $CJED$ un carré, c , j et e trois nombres réels, et M un point du plan $\mathcal{P}$ tel que : $\vec{u} = c\vec{MC} + j\vec{MJ} + e\vec{ME}$.

1. Trouver les conditions entre les réels c , j et e pour que le vecteur $\vec{u}$ soit indépendant de M .
2.
 - a. Trouver une condition entre les réels c , j et e pour que l'équation $\forall M \in \mathcal{P}$, $c\vec{MC} + j\vec{MJ} + e\vec{ME} = \vec{0}$ admette une unique solution P .
 - b. Prouver alors que $c\vec{MC} + j\vec{MJ} + e\vec{ME} = (c + j + e)\vec{MP}$.
3. On pose $c = 1$, $j = -1$ et $e = 1$
 - a. Déterminer le barycentre des points pondérés $(C, 1)$, $(J, -1)$ et $(E, 1)$.
 - b. Déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$, tels que : $CM^2 - JM^2 + EM^2 = CE^2$.
 - c. Déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$, tels que : $(\vec{MC} - \vec{MJ} + \vec{ME}) \cdot (\vec{MC} - 2\vec{MJ} + \vec{ME}) = 0$.

Problème (12 pts)

Soit f_m la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f_m(x) = \frac{mx^2 - 2x + m}{x^2 - 2mx + 1} \text{ où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

Partie A

1. Déterminer suivant les valeurs de m , la domaine de définition Df_m de f_m .
2. Montrer que toutes les courbes (C_m) sauf (C_1) et (C_{-1}) passent par deux points fixes A et B dont on précisera les coordonnées.
3. Soit M un point du plan. Discuter suivant la position du point M dans le plan, le nombre de courbe (C_m) passant par M .

Partie B

On suppose dans cette partie que $m \in]-1; 1[$.

1. Etudier la fonction $f_{1/2}$ obtenue pour $m = \frac{1}{2}$. Tracer la courbe $(C_{1/2})$ de cette fonction dans un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Etudier la fonction f_m . En donner le tableau de variation.
3. Montrer que, $\forall m \in]-1; 1[$ et $x \in \mathbb{R}$ on a : $f_m(x) + 1 \leq 0$ et $-f_m(x) + 1 \geq 0$.
4. En déduire que $\forall m \in]-1; 1[$, les valeurs de $f_m(x)$ sont comprise entre -1 et 1 .
5. On désigne par (D_m) la tangente à (C_m) en son point d'intersection B_m avec l'axe des ordonnées.
 - a. Montrer que (D_m) coupe (C_m) en un point P_m distinct du point B_m .
 - b. Déterminer en fonction de m , les coordonnées de P_m .
 - c. Quel est l'ensemble des points P_m lorsque m décrit $]-1; 1[$.

Après avoir fais les études qui s'imposent, tracer cet ensemble dans le repère précédant.

Partie C

Soit h la fonction numérique de la variable réelle x dans $]-2; 2[$ définie par :

$$h(x) = \frac{|x|(x^2 - 3)}{2} \text{ et } (C_h) \text{ sa courbe représentative dans les repère } (o, \vec{i}, \vec{j}).$$

1. Trouver une relation entre l'ensemble déterminer dans partie B et $h(x)$.
2. Donner une méthode de construction de la courbe (C_h) .
3. Construire (C_h) dans le même repère que précédemment.

s'unir pour bâtir, c'est grandir ensemble
s'unir pour bâtir, c'est grandir ensemble.