



Classe 1^{re} C4

N°2

Durée : 4H

Epreuve de Mathématique

Exercice 1

On donne deux points distinctes A et B de l'espace

1. Déterminer la condition sur le couple de réel $(\alpha ; \beta)$ pour que, pour tout point M de l'espace, il existe un unique point M' tel que : $\alpha \overrightarrow{M'A} + \beta \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{M'M} = \vec{0}$.
2. On suppose, dans toute la suite, réalisé la condition trouvée et on désigne par f l'application qui à M, associe M'.
 - a. Déterminer, suivant les valeurs du couple $(\alpha ; \beta)$, l'ensemble des points invariants par f
 - b. On suppose $\alpha + \beta = 0$; Exprimer, pour tout point M, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du réel α ; En déduire la nature de f .
 - c. On suppose $\alpha + \beta = 0$; Montrer que f est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

Exercice 2

NB : Les parties A et B sont indépendante

Partie A

Soit la famille d'équations : $z^2 - (1 + i \sin \theta)z + \frac{i}{2} \sin 2\theta = 0$ (E_θ) dans laquelle θ désigne un réel appartenant à l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right]$.

Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$; à tout complexe $z = x + iy$; $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ On associe le point M de coordonnées $(x; y)$ dans $\mathcal{P}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ (E_θ) Préciser les cas de racines doubles.
2. Soit $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$ les points de $\mathcal{P}$ associés aux solutions $z'(\theta)$ et $z''(\theta)$ de l'équation (E_θ) et I(θ) le milieu du segment $[M'(\theta)M''(\theta)]$.
 - a. Déterminer l'ensemble des points I(θ) quand θ décrit $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right]$.
 - b. Montrer que l'ensemble des points $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$ est un cercle (C) que l'on précisera.
 - c. Démontrer, lorsque $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$ sont distincts, que la droite contenant ces deux points a une direction indépendante de θ .
 - d. θ étant donné (On fera la figure avec $\theta = \frac{\pi}{6}$), déduire de ce qui précède une construction simple de I(θ) et des points $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$. Une figure soignée comportera tous les éléments intéressants de l'exercice.

Partie B

Soit $\mathcal{S}$ la transformation du plan complexe dans lui-même qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = (1 + i)z + 3i$

1. Déterminer la nature de $\mathcal{S}$ ses éléments caractéristiques
2. Soit O l'origine du repère. On considère la rotation $\mathcal{R}$ de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On pose $f = \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$.
Déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques.
3. Quelle est l'image de A(-3).

Problème

Partie A

1. On considère une fonction de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \tan x$. Démontrer que c'est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite du problème, on désignera par φ la fonction réciproque de cette bijection. Préciser le domaine de définition de φ ainsi que les nombres $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ et $\varphi(\sqrt{3})$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.

Tracer dans un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \tan x$, en déduire sur le même graphique la courbe représentative la fonction φ .

2. Démontrer que $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Calculer $\varphi'(0)$ et en déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x}$. Démontrer alors que la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \frac{\varphi(x)}{x}$ pour $x \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$ est continue en 0. Démontrer ensuite qu'elle est continue sur tout $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que $\forall x > 0, 0 \leq x - \varphi(x) \leq \frac{x^3}{3}$.

Partie B

Dans toute la suite du problème, on considère la fonction f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\varphi(t)}{t} dt \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 1.$$

1. Montrer que $1 - f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{t - \varphi(t)}{t} dt$ si $x > 0$.
2. En déduire que $0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{9}$ si $x > 0$ et que f est continue à droite en 0 et que la dérivée à droite de f en 0 est 0.
3. Démontrer que $0 \leq \int_1^x \frac{\varphi(t)}{t} dt \leq \frac{\pi}{2} \ln x$ si $x \geq 1$.
4. En écrivant $f(x) = \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t} dt + \frac{1}{x} \int_1^x \frac{\varphi(t)}{t} dt$, calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Partie C

1. Vérifier que $x^2 f'(x) = - \int_0^x \frac{\varphi(t)}{t} dt + \varphi(x)$ pour tout $x > 0$.
2. On pose $g(x) = x^2 f'(x)$ pour tout $x > 0$. Vérifier que $x g'(x) = -\varphi(x) + \frac{x}{1+x^2}$.
3. Etudier les variations de la fonction h de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = x g'(x)$. En déduire le signe $g'(x)$ puis de $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
4. Rassembler les résultats des parties A et B pour donner l'allure de courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

s'unir pour bâtir, c'est grandir ensemble