



**Terminale D**

**Durée : 4H**

**Epreuve de Mathématiques**

NB: Le candidat choisira un exercice entre l'exercice 2 et 3

**EXERCICE 1 (4 pts) [Complexe]**

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct (O,u,v) (Unité graphique:4 cm). On appelle A, B, et C les points d'affixes respectives  $2i$ ,  $1$  et  $\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$ . Soit R la

transformation du plan qui, à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que:  $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z$

1. Donner la nature et les éléments caractéristiques de cette transformation.
2. Soit ( $\Delta$ ) l'ensemble des points M d'affixe z tel que:  $|z-2i|=2$ .
  - a. Déterminer et construire ( $\Delta$ )
  - b. Déterminer et construire l'image de ( $\Delta$ ) par la transformation R.
3. Soit (D) l'ensemble des points M d'affixe z tel que:  $|z-1|=|z-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i|$ .
  - a. Déterminer et construire (D).
  - b. Déterminer et construire l'image de (D) par R.

**EXERCICE 2 (4 pts) [Intégration]**

On définit une suite ( $I_n$ ) en posant, pour tout entier naturel n,  $I_n = \int_0^n x^2 e^{-x} dx$ .

1. Montrer que ( $I_n$ ) est une suite croissante.
2. Calculer  $I_n$  en fonction de n (On pourra effectuer deux intégrations par parties successives).
3. Déterminer la limite  $\alpha$  de la suite ( $I_n$ ).
4. Trouver à l'aide d'une calculatrice le plus petit entier n tel que  $|I_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ .

**EXERCICE 3 (4 pts) [Probabilité]**

Un jeu consiste à lancer une bille dans un circuit comportant cinq butoirs: A, B, C, D, E marqués respectivement de 1, 2, 3, 4, 5 points. La bille frappe au hasard un des butoirs A ou B ou C. Puis:

- De A, elle frappe au hasard B ou D ou E.
- De B, elle frappe au hasard D ou E.
- De C, elle frappe E, et de D ou de E, elle sort du circuit;

Le joueur totalise alors les points marqués sur les butoirs heurtés par la bille.

1.
  - a. Faire un schéma indiquant tous les trajets possibles.
  - b. Montrer que la probabilité du trajet (A, B, D) est  $1/18$ .
  - c. Déterminer la probabilité de chacun des trajets.
  - d. Déterminer la probabilité pour que la bille frappe le butoir B au cours de son trajet.
2. Soit X la variable aléatoire réelle prenant pour valeur le nombre de points obtenus au cours du trajet.  
Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

**PROBLEME (12pts)**

**PARTIE A (Unité: 5 cm)**

On considère la fonction f définie sur  $]0;1[$  par  $f(x) = \frac{1}{2}[\ln x - \ln(1-x)]$  et (C) sa courbe.

1. a. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.  
b. Préciser les asymptotes à (C).  
c. Etudier le sens de variation de  $f$  puis dresser son tableau de variation.
2. a. Montrer que (C) admet pour centre de symétrie le point  $A(\frac{1}{2}; 0)$ .  
b. Déterminer une équation de la tangente (D) à la courbe (C) en A.  
On pose  $q(x)=f(x)-2x+1$ .  
Etudier les variations de la fonction  $q$ ; en déduire les positions relatives de (C) et (D).
3. Tracer (C) et (D) dans le repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  avec soin.

### **PARTIE B**

1. On considère la fonction  $h(x)=f(x)-x$ .  
a. En utilisant les variations de  $h$ , démontrer que l'équation  $f(x)=x$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]0; 1[$ .  
b. Montrer que  $0,8 \leq \alpha \leq 0,9$ .  
c. Montrer que  $\forall x \in ]0; 1[, |f'(x)| \geq 2$ .
2. On appelle  $S$  la symétrie orthogonale dont l'axe est la droite  $(\Delta): y=x$  et  $(C')$  l'image de (C) par  $S$ .  
a. Démontrer qu'un point  $M(x;y)$  appartient à  $(C')$  si et seulement si l'on a:  
 $y \in ]0; 1[, \text{ et } 2x = \ln(\frac{y}{y-1})$ .  
En déduire que  $(C')$  est la représentation graphique de  $g$  définie par  $g(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$ .  
b. Tracer  $(\Delta)$  et  $(C')$  dans le repère précédent.  
c. Montrer que  $\alpha$  est l'unique solution de l'équation  $g(x) = x$ .

### **PARTIE C**

1. On appelle  $I$  l'intervalle  $[0,8; 0,9]$   
a. Calculer  $g'(x)$  et  $g''(x)$ .  
b. Montrer que  $\forall x \in I, g(x) \in I$ .  
c. Montrer que  $\forall x \in I, 0 \leq g'(x) \leq 0,3$ .  
d. En déduire que  $\forall x \in I, |g(x) - \alpha| \leq 0,3 |x - \alpha|$ .
2. On considère la suite  $(U_n)$  définie sur  $I$  par  $U_0=0,8$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1}=g(U_n)$   
a. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a } |U_{n+1} - \alpha| \leq 0,3 |U_n - \alpha|$ .  
b. En déduire que  $|U_n - \alpha| \leq 0,1 (0,3)^n$ .  
c. Déterminer un entier naturel  $p$  tel que  $U_p$  soit une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-4}$  près.
3. Déterminer l'aire en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan délimitée par  $(C')$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x=1, x=n$  ( $n$  est un entier naturel supérieur à 1).
4. On pose  $A_n$ , cette aire en u. à (Unités d'aires).  
a. Représenter  $A_2$  sur le graphique précédent.  
b. Déterminer limites de  $A_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

*s'unir pour bâtir, c'est grandir ensemble*